

Exercice N°1

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty]$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

on désigne par (C_f) sa courbe représentation Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus
b/ Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$
c/ Dresser le tableau de variation de f et vérifier que $f([2, 3]) \subset [2, 3]$.
d/ Montrer que pour tout $x \in [2, 3]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$.
- 3) a/ Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J dont on déterminera.
b/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- 4) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 \leq U_n \leq 3$.
b/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |U_n - \alpha|$.
c/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0 - \alpha|$
d/ Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Correction :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \text{ car : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0$$

Donc :

la droite d'équation: $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\ &= 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Donc : la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C_f) au $V(+\infty)$

b) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$.

On a : $x \rightarrow x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle dérivable sur $]1, +\infty[$.

$x \rightarrow x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$; $x^2 - 1 > 0$

Donc la fonction : $x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

Conclusion : $f: x \rightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

et pour tout $x \in]1, +\infty[$; on a :

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x^2 - 1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

c) Tableau de variation de f :

On a : pour tout $x \in]1, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

Donc : pour tout $x \in]1, +\infty[$; $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement

Décroissante sur $]1, +\infty[$.

Tableau de variation de f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	2

On a : f est continue , strictement f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$,

Donc : $f([2, 3]) = [f(3), f(2)]$

Or : $f(3) = 1 + \frac{3}{\sqrt{8}} \in [2, 3]$ et $f(2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \in [2, 3]$

Donc : $[f(3), f(2)] \subset [2, 3]$ et par suite : $f([2, 3]) \subset [2, 3]$.

d) Montrer que pour tout $x \in [2, 3]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

On a ; d'une part : $|f'(x)| = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

D'autre part : $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 3$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq \sqrt{3} \Rightarrow (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} \geq 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

2) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$

On pose la fonction h définie par : $h(x) = f(x) - x$

On a : h est continue , strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

Et puisque : $h(2) \times h(3) = (f(2) - 2) \times (f(3) - 3) < 0$

(car $f(2) > 2$ et $f(3) < 3$)

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires ,

l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$

signifie : $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$

5)a/ Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J dont on déterminera .

On sait que f est continue , strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $J = f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$

et on a : $f^{-1} :]2, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$

b) Soit $x \in]2, +\infty[$; $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et $y \in]1, +\infty[$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = x \text{ et } y \in]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = x - 1 \text{ et } y \in]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{y^2 - 1} = (x - 1)^2 \text{ et } y \in]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (y^2 - 1)(x - 1)^2 \text{ et } y \in]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow y^2(1 - (x - 1)^2) = -(x - 1)^2 \text{ et } y \in]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)^2 - 1}} \text{ et } y \in]1, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)^2 - 1}}$$

Donc pour tout $x \in]2, +\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)^2 - 1}}$.

1) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$

a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $2 \leq U_n \leq 3$

Pour $n = 0$; $U_0 = 2 \in [2, 3]$

Soit un entier $k \geq 0$,

supposons que : $2 \leq U_k \leq 3$ et montrons que $2 \leq U_{k+1} \leq 3$

Puisque $2 \leq U_k \leq 3$ alors : $U_k \in [2, 3] \Rightarrow f(U_k) \in f([2, 3]) \subset [2, 3]$

Donc : $U_{k+1} \in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq U_{k+1} \leq 3$

Douna Ali

Conclusion : d'après le principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N} ; 2 \leq U_n \leq 3$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} ; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |U_n - \alpha|$

On sait que f est dérivable sur $[2, 3]$ et pour tout $x \in [2, 3] ; |f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Donc : 'd'après l'inégalité des accroissements finis :

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N} ; U_n \in [2, 3]$ et $\alpha \in [2, 3]$;

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |U_n - \alpha|$$

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N} ; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |U_n - \alpha|$ car : $f(\alpha) = \alpha$

c) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N} ; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Pour $n = 0 ; |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^0 |U_0 - \alpha|$ car : $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^0 = 1$

Soit un entier $k \geq 0$, supposons que : $|U_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^k |U_0 - \alpha|$

Et montrons que : $|U_{k+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{k+1} |U_0 - \alpha|$

On sait que d'après a) $|U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |U_k - \alpha|$

Et puisque d'après l'hypothèse de récurrence : $|U_k - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^k |U_0 - \alpha|$

Alors : $|U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^k |U_0 - \alpha| \Rightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{k+1} |U_0 - \alpha|$

Conclusion : d'après le principe de récurrence :

pour tout $n \in \mathbb{N} ; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0 - \alpha|$

d/ Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

puisque : $-1 < \frac{1}{3\sqrt{3}} < 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0 \text{ alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

Exercice N°2 : Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

- 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat
- 2) Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
- 3) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J dont on précisera
- 4) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f
 - a/ Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et calculer $(f^{-1})'_d(0)$
 - b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$
- 5) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1) on a tracé la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère .

Correction :

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sqrt{\tan x}$.

- 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\tan 0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{\frac{\tan x}{x}}$$

Puisque on sait que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\tan 0}}{x - 0} = +\infty$$

Donc : f n'est pas dérivable à droite en 0 , et la courbe (C_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Puisque la fonction : $x \rightarrow \tan x$ est dérivable et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$,

Alors : $f: x \rightarrow \sqrt{\tan x}$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et on a :

$$\text{Pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[; f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$$

3) Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle I dont on précisera

$$\text{On a : Pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[; f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$$

$$\Rightarrow \text{Pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[; f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow \text{donc : } f \text{ est strictement croissante sur }]0, \frac{\pi}{2}[$$

On a : f est continue, strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc elle réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $J = f\left(]0, \frac{\pi}{2}[\right) = [0, +\infty[$.

4) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f ;

a/ Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et calculer $(f^{-1})'_d(0)$

On sait que : $f(0) = 0$ donc : $f^{-1}(0) = 0$

Et pour tout $x \in [0, +\infty[$; il existe un unique $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{f(y)}{y}} = 0$$

$$\text{car : } \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{y} = +\infty$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable à droite en 0

$$\text{Et } (f^{-1})'_d(0) = 0$$

b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

Soit $y \in]0, +\infty[\Leftrightarrow$ il existe un unique $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $f(x) = y$

Puisque f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $f'(x) \neq 0$

Alors : f^{-1} est dérivable en y et pour tout $y \in]0, +\infty[$;

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}} \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{2\sqrt{\tan x}}{1+\tan^2 x}$$

$$\text{Or on sait que : } f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\tan x} = y \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{2y}{1+y^4}$$

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

