

RACINES NIÈMES

EXERCICE

1- Simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{3^4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[6]{3^5}}$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations :

$$(I): \sqrt{x-2} > \sqrt[3]{x-2}$$

$$(E): \sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-1} = 2$$

3- Ranger les nombres suivants par ordre croissant :

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[6]{26}.$$

RACINES NIÈMES

CORRECTION DÉTAILLÉE

1- **Simplifions A** : avec $A = \frac{\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{3^4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[6]{3^5}}$.

La stratégie est de tout exprimer en puissances de 3.

○ $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3^1$

○ $\sqrt{3} = 3^{1/2}$

○ $\sqrt[3]{3^4} = (3^4)^{1/3} = 3^{4/3}$

○ $\sqrt[6]{3^5} = (3^5)^{1/6} = 3^{5/6}$

En substituant dans A, on obtient :

$$A = \frac{3^1 \cdot 3^{4/3} \cdot 3^{1/2}}{3^{5/6}} = 3^{1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6}} = 3^{\frac{6+8+3-5}{6}} = 3^{\frac{12}{6}} = 3^2$$

Donc : $A = 9$.

RACINES NIÈMES

SUITE

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I): $\sqrt{x-2} > \sqrt[3]{x-2}$

- *Domaine de définition* : l'inéquation (I) est définie juste si : $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$.

Le domaine de définition est $D_I = [2, +\infty[$.

- *Résolution* :

Posons $y = \sqrt[6]{x-2}$. Alors $\sqrt{x-2} = y^3$ et $\sqrt[3]{x-2} = y^2$.
L'inéquation devient :

$$\begin{aligned} y^3 > y^2 &\Leftrightarrow y^3 - y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow y^2(y - 1) > 0 \end{aligned}$$

RACINES NIÈMES

SUITE

Puisque $x \in [2, +\infty[$, $y \geq 0$.

- Si $y = 0$ (c'est-à-dire si $x = 2$), on a $0 > 0$, ce qui est faux. Donc $x = 2$ n'est pas solution.
- Si $y > 0$, alors $y^2 > 0$. Donc:

$$\begin{aligned}y^2(y - 1) > 0 &\Leftrightarrow y - 1 > 0 \\&\Leftrightarrow y > 1 \\&\Leftrightarrow \sqrt[6]{x - 2} > 1 \\&\Leftrightarrow (\sqrt[6]{x - 2})^6 > 1^6 \\&\Leftrightarrow x - 2 > 1 \\&\Leftrightarrow x > 3\end{aligned}$$

RACINES NIÈMES

SUITE

Ensemble des solutions :

On prend l'intersection du résultat avec le domaine de définition : $S_I = [2, +\infty[\cap]3, +\infty[$.

Par suite : $S_I =]3, +\infty[$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-1} = 2$

◦ *Domaine de définition :*

L'équation (E) est définie juste si $x+7 \geq 0$ et $x-1 \geq 0$

C.à.d $x \geq -7$ et $x \geq 1$

Donc $D_E = [1; +\infty[$.

RACINES NIÈMES

SUITE

En simplifiant l'équation , on a:

$$\begin{aligned}8 - 3\sqrt[3]{(x+7)(x-1)} \cdot (2) &= 8 \Leftrightarrow 8 - 6\sqrt[3]{x^2 + 6x - 7} = 8 \\&\Leftrightarrow -6\sqrt[3]{x^2 + 6x - 7} = 0 \\&\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 + 6x - 7} = 0 \\&\Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \\&\Leftrightarrow x = -7 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

Par suite: $S_E = \{-7, 1\}$.

RACINES NIÈMES

SUITE

◦ *Résolution :*

Utilisons l'identité $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

Posons $a = \sqrt[3]{x+7}$ et $b = \sqrt[3]{x-1}$.

L'équation est $a - b = 2$.

Élevons les deux membres au cube :

$$(\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-1})^3 = 2^3$$

$$\Leftrightarrow (x+7) - (x-1) - 3\sqrt[3]{(x+7)(x-1)} \underbrace{(\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x-1})}_{=2} = 8$$

RACINES NIÈMES

SUITE

3- **Ranger les nombres par ordre croissant : $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{26}$.**

Pour comparer ces nombres, nous devons les écrire avec le même indice de racine. L'indice commun est le PPCM des indices (2, 3, et 6).

$$\text{PPCM}(2, 3, 6) = 6.$$

Nous allons donc exprimer chaque nombre comme une racine d'indice 6.

- $\sqrt{3} = 3^{1/2} = 3^{3/6} = (3^3)^{1/6} = \sqrt[6]{27}$
- $\sqrt[3]{5} = 5^{1/3} = 5^{2/6} = (5^2)^{1/6} = \sqrt[6]{25}$
- $\sqrt[6]{26}$ reste inchangé.

RACINES NIÈMES

SUITE

Maintenant, nous comparons les nombres sous la racine sixième. La fonction $f(t) = \sqrt[6]{t}$ est strictement croissante pour $t \geq 0$, donc l'ordre des nombres est le même que l'ordre des radicandes.

Nous avons : $25 < 26 < 27$

Par conséquent : $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{26} < \sqrt[6]{27}$

Ce qui nous donne l'ordre final en remplaçant par les expressions originales : $\sqrt[3]{5} < \sqrt[6]{26} < \sqrt{3}$