

ANALYSE

Préparation à l'Examen National

PROBLÈME

(08,5 points)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x \ln x$.

1. Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) < 0$. (0,25 pt)
2. Dresser le tableau de variations de g sur $[1; +\infty[$. (0,5 pt)
3. Montrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser. (0,5 pt)
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$ telle que $1,7 < \alpha < 1,8$. (0,5 pt)
5. Préciser le signe de g sur $[1; +\infty[$. (0,25 pt)

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (-x+1) \ln(-x+1), & \text{si } x < 1 \\ e^{-x+1} \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

1. (a) Montrer que f est continue en 1. (0,5 pt)
 (b) Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement les résultats. (0,5 pt)
2. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement. (0,75 pt)
 (b) Étudier la branche infinie de (C_f) en $-\infty$. (0,25 pt)
3. (a) Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty; 1[$ et étudier son signe. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $\forall x > 1, f'(x) = \frac{g(x)e^{-x+1}}{x}$ et en déduire son signe. (0,5 pt)
4. Dresser le tableau de variations complet de f . (0,5 pt)
5. Tracer la courbe (C_f) . (0,75 pt)

PARTIE C

1. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.
 (a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} . (0,25 pt)
 (b) Préciser $D_{h^{-1}}$ et tracer sa courbe dans le même repère. (0,25 pt)
2. Calculer en cm^2 l'aire $A(\xi)$ délimitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 0$. (0,25 pt)