

Analyse

Préparation à l'Examen National

Problème

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2\ln x$.

- 1) a) Déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
 b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$ et étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$.
 c) Dresser le tableau de variation complet de la fonction g .
- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.
 b) Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.
 c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, \alpha]$ et sur $[\alpha, +\infty[$.

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 b) En déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 2) a) Montrer que f est continue à droite au point 0.
 b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
 c) Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
- 3) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$.
 b) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
- 4) Tracer la courbe (C) (on prendra $\alpha \approx 0,45$).
- 5) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_1^2 x \ln x \, dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.
 b) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.