

Spécial limites · 12 séries

Questions de concours

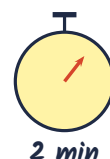
96 questions sur les limites, du Bac aux concours

Le barème des concours $+4 / -1 / 0$
environ 2 minutes par question*Défi de concours*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = ?$$

Question 78 ★★★

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = ?$$



(A) 1

(B) e^2 ✓(C) e (D) $+\infty$

par série : 6 QCM et 2 réponses numériques

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

12 séries

96 questions corrigées

Méthodes express

Grille des réponses

Sommaire

1	Limites usuelles et opérations	3	9	Limites avec le logarithme	11
2	Formes indéterminées et racines	4	10	Limites avec l'exponentielle	12
3	Limites trigonométriques	5	11	Limites de sommes et d'intégrales	13
4	Encadrements et partie entière	6	12	Défis de concours	14
5	Continuité et prolongement	7		Grille des réponses	15
6	Limites et nombre dérivé	8	9	Les corrigés détaillés	15
7	Branches infinies	10	10	Mon bilan	30
8	Limites de suites				

Comment utiliser cette série

12 séries, 96 questions

Une série par type de limites, sur une seule page :
6 QCM (une seule bonne réponse parmi **A, B, C, D**)
puis 2 questions à **réponse numérique** (un nombre entier).

Les niveaux de difficulté

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (écoles d'ingénieurs, médecine, classes préparatoires).

Le barème des concours

■ bonne réponse : +4 points

■ QCM faux : -1 point

■ sans réponse : 0 point

■ réponse numérique fausse : 0 point

Une série est notée sur 32, le livret sur 384.
Répondre au hasard coûte cher : on ne coche que si l'on est sûr ou presque !

Le chrono

Environ **2 minutes par question**, soit **16 minutes par série**.

Conseil : cherche toute la série au chrono, note tes réponses, puis vérifie-les avec la grille des réponses. Lis ensuite le corrigé de chaque question : il donne la solution rédigée et, souvent, une **méthode express** pour aller plus vite le jour du concours.

1

Limites usuelles et opérations

Polynômes, fractions rationnelles, valeur absolue, limites à gauche et à droite, paramètres.

Question 1 Termes dominants ★★

corrigé p. 16

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)^3}{(1-x)(x^2+4)}$.

- (A) 8 (B) -2 (C) -8 (D) $-\infty$

Question 2 Valeur absolue en $-\infty$ ★★

corrigé p. 16

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 3x| + x|x|}{x}$.

- (A) -3 (B) 3 (C) $-\infty$ (D) 0

Question 3 Composée et côté ★★★

corrigé p. 16

Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x^2+1}{x^2-x}\right)$.

- (A) $-\infty$ (B) 1 (C) n'existe pas (D) $+\infty$

Question 4 Paramètre et degré ★★★

corrigé p. 16

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \frac{(m-1)x^2 + mx + 1}{(m+1)x - 1}$. L'ensemble des réels m pour lesquels f_m admet une limite finie en $+\infty$ est :

- (A) {1} (B) {-1; 1} (C) {-1} (D) $\emptyset$

Question 5 Asymptote en $-\infty$ ★★★

corrigé p. 16

Les réels a et b vérifient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2|x| + ax^2}{x^2 + 1} - bx \right) = 3$. Le couple (a, b) est :

- (A) (3, 1) (B) (3, -1) (C) (-3, -1) (D) (-3, 1)

Question 6 Paramètre et signe ★★★★★

corrigé p. 17

Soit $m \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + mx + m^2 - 3}{x - 1} = -\infty$ si et seulement si :

- (A) $m \in [-2, 1]$ (B) $m \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$
(C) $m \in]-2, 1[$ (D) $m \in [-2, 1[$

Question 7 Dix facteurs impairs ★★★

corrigé p. 17

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x+3)(x+5)\cdots(x+19) - x^{10}}{x^9}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 8 Polynôme mystère ★★★★★

corrigé p. 17

Soit P un polynôme de degré au plus 5 tel que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{(x-1)^2} = 2$. Calculer $P(-2)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

2

Formes indéterminées et racines

Quantité conjuguée, factorisation, racines carrées et cubiques, paramètres à déterminer.

Question 9 Différence de racines ★★

corrigé p.17

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 - 2x})$.

- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 0

Question 10 Racine double ★★

corrigé p.17

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

Question 11 Deux fractions ★★★

corrigé p.17

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{5}{1-x^5} \right)$.

- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 0

Question 12 Racines cubique et carrée ★★★

corrigé p.17

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 + 4x})$.

- (A) 1 (B) -1 (C) -3 (D) 0

Question 13 Limite finie imposée ★★★

corrigé p.17

Les réels a et b sont choisis pour que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + ax + b}{(x-1)^2}$ soit finie. Cette limite vaut :

- (A) 12 (B) 3 (C) 6 (D) 4

Question 14 Au second ordre ★★★★★

corrigé p.18

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$.

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$

Question 15 Paramètres en $-\infty$ ★★★

corrigé p.18

Les réels a et b vérifient $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + 1} + 3x) = 2$. Calculer $a + b$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 16 Racine multiple ★★★★★

corrigé p.18

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 100x + 99}{(x-1)^2}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

3

Limites trigonométriques

Limites de référence en 0, changements de variable, comportement en $+\infty$.

Question 17 Limites de référence ★★

corrigé p. 18

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \tan 2x}{3x - \sin x}$.

- (A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 3 (D) 6

Question 18 Deux sinus ★★

corrigé p. 18

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x} \right)$.

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) n'existe pas

Question 19 Cosinus emboîtés ★★★

corrigé p. 18

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$.

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{16}$

Question 20 Passage par π ★★★

corrigé p. 18

Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$.

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{3}{2}$

Question 21 Racine et côté ★★★

corrigé p. 18

Calculer $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $+\infty$

Question 22 Une suite trigonométrique ★★★★★

corrigé p. 19

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi\sqrt{n^2 + 1})$, où n désigne un entier naturel.

- (A) 2π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) π

Question 23 Produit de cosinus ★★★

corrigé p. 19

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x}{x^2}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 24 Tangente et sinus ★★★★★

corrigé p. 19

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 2 \sin x}{x^3}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

4

Encadrements et partie entière

Gendarmes, comparaison, fonctions bornées ; E désigne la fonction partie entière.

Question 25 Comparaison en $-\infty$ ★★

corrigé p. 19

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2 + \sin x)}{x - 1}$.

- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) n'existe pas

Question 26 Des deux côtés ★★

corrigé p. 19

La limite $\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right)$ (en 0, à gauche comme à droite) :

- (A) vaut 0 (B) n'existe pas (C) vaut -1 (D) vaut 1

Question 27 Partie entière piégée ★★★

corrigé p. 19

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left[E\left(\frac{\sin x}{x}\right) + E\left(\frac{\tan x}{x}\right) \right]$.

- (A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) n'existe pas

Question 28 Somme de parties entières ★★★

corrigé p. 19

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(k\sqrt{2})$.

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

Question 29 Racine perturbée ★★★

corrigé p. 20

La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x \sin x} - x)$:

- (A) vaut 0 (B) vaut $\frac{1}{2}$ (C) vaut $+\infty$ (D) n'existe pas

Question 30 Réciproque de $x^3 + x$ ★★★★★

corrigé p. 20

On admet que $g : x \mapsto x^3 + x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; on note f sa bijection réciproque.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x} - f(x))$.

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 3

Question 31 À gauche de $\sqrt{2}$ ★★★

corrigé p. 20

Calculer $\lim_{x \rightarrow (\sqrt{2})^-} (E(x) + E(x^2) + E(x^3) + E(x^4) + E(x^5) + E(x^6))$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 32 Points de discontinuité ★★★★★

corrigé p. 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x^2) - (E(x))^2$. En combien de réels $a \in [0, 3]$ la fonction f est-elle discontinue en a (à gauche ou à droite) ?

Réponse numérique (un entier) : _____

5

Continuité et prolongement

Paramètres, prolongements, composées, TVI, réciproques et racines n -ièmes.

Question 33 Continuité à paramètre ★★

corrigé p. 20

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f définie par $f(x) = \frac{\sin(mx)}{\sqrt{1+x}-1}$ si $x > 0$, $f(x) = x^2 + 4$ si $x \leq 0$. La fonction f est continue en 0 si et seulement si :

- (A) $m = 8$ (B) $m = 2$ (C) $m = 4$ (D) $m = \frac{1}{2}$

Question 34 Racine carrée, racine cubique ★★

corrigé p. 20

Le prolongement par continuité en 1 de $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ prend en 1 la valeur :

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

Question 35 Un cosinus dans un sinus ★★★

corrigé p. 20

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x^2}$.

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) 0

Question 36 Une équation de degré 4 ★★★

corrigé p. 21

Quels que soient les réels a, b, c , l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$ admet :

- (A) au plus deux solutions réelles (B) exactement deux solutions réelles
(C) au moins une solution > 0 et une < 0 (D) au moins une solution dans $[-1, 1]$

Question 37 Deux racines à l'infini ★★★

corrigé p. 21

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - \sqrt{x^2 + x})$.

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) 0

Question 38 Réciproque à l'infini ★★★★★

corrigé p. 21

Soit g la réciproque de la bijection $x \mapsto x + \sqrt{x}$ de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + \sqrt{x})$.

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

Question 39 Prolonger un quotient ★★★

corrigé p. 21

Valeur en 1 du prolongement par continuité de $f : x \mapsto \frac{x^{10} - 10x + 9}{(x-1)^2}$:

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 40 Trois cosinus et deux racines ★★★★★

corrigé p. 21

Valeur en 0 du prolongement par continuité de $f : x \mapsto \frac{1 - \cos(2x)\sqrt{\cos(4x)}\sqrt[3]{\cos(6x)}}{x^2}$:

Réponse numérique (un entier) : _____

6

Limites et nombre dérivé

Reconnaître un taux d'accroissement, dérivabilité à droite et à gauche, demi-tangentes.

Question 41 Un taux déguisé ★★

corrigé p. 21

Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$.

- (A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Question 42 Un raccord dérivable ★★

corrigé p. 21

Soit a, b deux réels et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx$ si $x < 1$. La fonction f est dérivable en 1 si et seulement si :

- (A) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ (B) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ (C) $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ (D) $a = -1, b = 2$

Question 43 Quotient de différences ★★★

corrigé p. 21

Soit a un réel. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x \sin a - a \sin x}{x - a}$.

- (A) $a \cos a - \sin a$ (B) $\sin a + a \cos a$ (C) $\cos a - a \sin a$ (D) $\sin a - a \cos a$

Question 44 Produit de deux racines ★★★

corrigé p. 22

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} \sqrt{1+2x} - 1}{x}$.

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

Question 45 Un point anguleux ★★★

corrigé p. 22

Soit $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4}$ pour $x \geq -1$. Au point d'abscisse 2, la courbe de f admet :

- (A) une tangente horizontale (B) une demi-tangente verticale
(C) deux demi-tangentes de pentes $\pm\sqrt{3}$ (D) deux demi-tangentes de pentes ± 3

Question 46 Deux racines du cosinus ★★★★★

corrigé p. 22

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $-\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $-\frac{1}{12}$

Question 47 Tangente au cube ★★★

corrigé p. 22

Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x - 1}{\cos(2x)}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 48 Compter les points anguleux ★★★★★

corrigé p. 22

En combien de points de l'intervalle $]0, 2\pi[$ la fonction $f : x \mapsto |\sin x| + |\sin 2x| + |\sin 3x|$ n'est-elle pas dérivable ?

Réponse numérique (un entier) : _____

7

Branches infinies

Asymptotes verticales, horizontales et obliques, branches paraboliques, position relative.

Question 49 Asymptote oblique ★★

corrigé p. 22

La courbe de $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}$ admet en $+\infty$ l'asymptote d'équation :

- (A) $y = 2x - 3$ (B) $y = 2x + 5$ (C) $y = 2x - 1$ (D) $y = 2x - 5$

Question 50 Compter les asymptotes ★★

corrigé p. 22

Nombre de droites asymptotes (verticales ou horizontales) de la courbe de $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$:

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Question 51 Asymptote en $-\infty$ ★★★

corrigé p. 23

Au voisinage de $-\infty$, la courbe de $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 2x}$ admet l'asymptote d'équation :

- (A) $y = -1$ (B) $y = 2x + 1$ (C) $y = 1$ (D) $y = -2x - 1$

Question 52 Asymptote ou branche ? ★★★

corrigé p. 23

Au voisinage de $+\infty$, la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}\sqrt{x}$ admet :

- (A) l'asymptote d'équation $y = x$ (B) l'asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$
 (C) une branche parabolique de direction $y = x$ (D) une branche parabolique de direction (Oy)

Question 53 Au-dessus de l'asymptote ★★★

corrigé p. 23

La courbe de $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x^2 + 1}$ est strictement au-dessus de son asymptote oblique si et seulement si x appartient à :

- (A) $]1, +\infty[$ (B) $]-1, +\infty[$ (C) $]-\infty, -1[$ (D) $]2, +\infty[$

Question 54 Gare au signe ★★★

corrigé p. 23

Les asymptotes de la courbe de $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ sont exactement :

- (A) $x = 1, y = x + 1$ (B) $x = 1, y = \pm(x + 1)$ (C) $x = \pm 1, y = x + 1$ (D) $x = 1, y = x$

Question 55 Traverser son asymptote ★★★

corrigé p. 23

Pour $x > 0$, $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$. Combien de points communs ont la courbe de f et son asymptote en $+\infty$ dans la bande $0 < x \leq 100$?

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 56 Asymptote d'une réciproque ★★★

corrigé p. 23

Soit g la réciproque de la bijection $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 3 + \frac{1}{x}$ de $[2, +\infty[$ sur $\left[\frac{9}{2}, +\infty\right[$. La courbe de g admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = ax + b$. Calculer ab .

Réponse numérique (un entier) : _____

8

Limites de suitesSuites géométriques, suites récurrentes, monotonie, gendarmes, racines n -ièmes, télescope.**Question 57 Puissances et paramètre ★★**

corrigé p. 23

L'ensemble des réels x pour lesquels la suite $\left(\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge est :

- (A) $] -1, 1[$ (B) $\mathbb{R}$ (C) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Question 58 Deux suites géométriques ★★

corrigé p. 24

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k + (-1)^k}{3^k}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$

- (A) $\frac{9}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{15}{4}$

Question 59 Récurrence quadratique ★★★

corrigé p. 24

Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $+\infty$

Question 60 Somme de parties entières ★★★

corrigé p. 24

Calculer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de $\frac{1}{n^2} (E(\sqrt{2}) + E(2\sqrt{2}) + \dots + E(n\sqrt{2}))$.

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Question 61 Racine n -ième d'un quotient ★★★

corrigé p. 24

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}}$.

- (A) 1 (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{5}{4}$

Question 62 Somme moins racine ★★★★★

corrigé p. 24

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. La suite (u_n) est :

- (A) croissante, de limite $+\infty$ (B) décroissante, de limite $-\infty$
(C) décroissante et convergente (D) croissante et convergente

Question 63 L'écart à une droite ★★★

corrigé p. 24

Soit $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2n)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 64 Une somme télescopique ★★★★★

corrigé p. 24

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

9 Limites avec le logarithme

Limite de référence $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$, croissances comparées et formes indéterminées.

Question 65 Deux logarithmes ★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1-3x)}$.

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{2}{3}$ (D) -1

Question 66 Le poids du facteur 3 ★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3n+1)}{\ln n}$.

- (A) 1 (B) 3 (C) $\ln 3$ (D) 0

Question 67 Un quotient proche de 1 ★★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

- (A) 0 (B) 1 (C) $+\infty$ (D) 2

Question 68 Grands exposants ★★★

corrigé p. 25

Pour $x = 10^{10}$, on a $(\ln x)^{100} \approx 10^{136}$ alors que $\sqrt[100]{x} \approx 1,26$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{100}}{\sqrt[100]{x}}$.

- (A) $+\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) 100

Question 69 Produit de logarithmes ★★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$.

- (A) $-\infty$ (B) -1 (C) 0 (D) $+\infty$

Question 70 Deux logarithmes jumeaux ★★★★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}$.

- (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

Question 71 Logarithme d'un cosinus ★★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 72 Somme de logarithmes ★★★★★

corrigé p. 25

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

10

Limites avec l'exponentielle

Limite de référence $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$, croissances comparées et formes 1^∞ .

Question 73 Polynôme contre exponentielle ★★

corrigé p. 26

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^x}{x^3 - e^x}$.

- (A) 1 (B) 0 (C) $-\infty$ (D) -1

Question 74 La fonction $x^{1/x}$ ★★

corrigé p. 26

Les limites de $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$ sont respectivement :

- (A) 1 et 1 (B) 0 et 0
(C) 0 et 1 (D) 1 et $+\infty$

Question 75 Une forme 1^∞ ★★★

corrigé p. 26

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

- (A) $\frac{1}{e}$ (B) e (C) 1 (D) $+\infty$

Question 76 Racines en exposant ★★★

corrigé p. 26

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})$.

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $+\infty$

Question 77 Moyenne de racines n -ièmes ★★★★★

corrigé p. 26

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n$.

- (A) 1 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 6

Question 78 Intérêts composés ★★★

corrigé p. 26

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$.

- (A) 1 (B) e^2 (C) e (D) $+\infty$

Question 79 Exponentielles symétriques ★★★

corrigé p. 26

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 80 Asymptote oblique ★★★★★

corrigé p. 26

En $+\infty$, la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x} e^{\frac{2}{x}}$ admet une asymptote d'équation $y = x + b$. Calculer $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.

Réponse numérique (un entier) : _____

11

Limites de sommes et d'intégrales

Question 81 Une suite d'intégrales ★★

corrigé p. 27

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ vaut :

- (A) $\ln 2$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

Question 82 Intégrer d'abord ★★

corrigé p. 27

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^{2x} \sin t \, dt$.

- (A) 2 (B) 1 (C) 4 (D) 0

Question 83 Une intégrale qui résiste ★★★

corrigé p. 27

Pour $x > 0$, $x \neq 1$, on pose $F(x) = \int_x^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$.

- (A) 0 (B) 2 (C) $+\infty$ (D) $\ln 3$

Question 84 Récurrence par parties ★★★

corrigé p. 27

On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$.

- (A) 0 (B) 1 (C) e (D) $+\infty$

Question 85 Plus fin que la limite ★★★★

corrigé p. 27

On pose $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$; on montre facilement que $J_n \rightarrow 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - J_n)$.

- (A) 0 (B) $\ln 2$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

Question 86 Somme de Riemann ★★★★

corrigé p. 27

On admet que, si f est continue sur $[0, 1]$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ quand $n \rightarrow +\infty$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$.

- (A) $\frac{4}{e}$ (B) $2 \ln 2 - 1$ (C) 2 (D) $\frac{e}{4}$

Question 87 Comparer à une intégrale ★★★

corrigé p. 27

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{9n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 88 Encadrer l'intégrande ★★★

corrigé p. 27

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_x^{3x} \sqrt{t^2 + 1} \, dt$.

Réponse numérique (un entier) : _____

12

Défis de concours

Tous les outils à la fois : logarithme, exponentielle, suites, dénombrement et probabilités.

Question 89 Deux puissances ★★

corrigé p. 28

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{8^x - 1}$.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) 1

Question 90 Tirages avec remise ★★

corrigé p. 28

Une urne contient n boules ($n \geq 2$), dont une seule rouge. On effectue n tirages avec remise ; p_n est la probabilité d'obtenir au moins une fois la boule rouge. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

(A) 1

(B) $1 - \frac{1}{e}$

(C) $\frac{1}{e}$

(D) $\frac{1}{2}$

Question 91 Les solutions de $\tan x = x$ ★★★

corrigé p. 28

Pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $\tan x = x$ a une unique solution u_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n\pi)$.

(A) π

(B) 0

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

Question 92 Nombre dérivé déguisé ★★★

corrigé p. 28

Calculer $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^e - e^x}{x - e}$.

(A) 0

(B) e^e

(C) $2e^e$

(D) 1

Question 93 Quotient de logarithmes ★★★

corrigé p. 28

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.

(A) 1

(B) $+\infty$

(C) e

(D) e^2

Question 94 Racine d'une équation ★★★★★

corrigé p. 28

Pour $n \geq 2$, l'équation $x^n = x+1$ admet une unique solution x_n dans $]1, +\infty[$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(x_n - 1)$.

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\ln 2$

Question 95 Inverses binomiaux ★★★

corrigé p. 28

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Question 96 Un coefficient central ★★★★★

corrigé p. 29

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$.

Réponse numérique (un entier) : _____

Grille des réponses

Pour chaque question : son numéro (en petit) puis la bonne réponse (lettre du QCM ou entier). Les questions 7 et 8 de chaque série sont à réponse numérique.

Série	QCM						Numériques	
1 Limites usuelles et opérations	1 C	2 A	3 D	4 A	5 B	6 C	7 100	8 -36
2 Formes indéterminées et racines	9 B	10 D	11 A	12 B	13 C	14 D	15 -3	16 4950
3 Limites trigonométriques	17 C	18 B	19 A	20 D	21 A	22 D	23 15	24 3
4 Encadrements et partie entière	25 B	26 D	27 C	28 A	29 D	30 C	31 19	32 9
5 Continuité et prolongement	33 B	34 D	35 A	36 C	37 B	38 A	39 45	40 12
6 Limites et nombre dérivé	41 C	42 A	43 D	44 B	45 C	46 D	47 -3	48 7
7 Branches infinies	49 D	50 B	51 A	52 C	53 B	54 A	55 31	56 -12
8 Limites de suites	57 C	58 D	59 A	60 B	61 D	62 C	63 -4	64 6
9 Limites avec le logarithme	65 C	66 A	67 D	68 B	69 C	70 A	71 -2	72 2
10 Limites avec l'exponentielle	73 D	74 C	75 A	76 D	77 C	78 B	79 9	80 4
11 Limites de sommes et d'intégrales	81 B	82 A	83 D	84 C	85 B	86 A	87 6	88 4
12 Défis de concours	89 C	90 B	91 D	92 A	93 C	94 D	95 2	96 4

Calculer son score

Pour une série : **score** = $4 \times (\text{bonnes réponses}) - 1 \times (\text{QCM faux})$. Les réponses numériques fausses et les questions sans réponse valent 0.

Exemple : 5 bonnes réponses, 2 QCM faux et 1 question sans réponse donnent $4 \times 5 - 2 = 18$ points sur 32.

Reporte tes scores dans le tableau « Mon bilan » à la fin du livret.

Les corrigés

Des solutions rédigées et des méthodes express

1 Corrigés : limites usuelles

■ Question 1

Réponse : C

Pour $x < 0$, on divise numérateur et dénominateur par x^3 : le numérateur devient $\left(2 - \frac{1}{x}\right)^3 \rightarrow 8$ et le dénominateur $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \rightarrow -1$. La limite vaut -8 .

Méthode express : en $\pm\infty$, une fraction rationnelle a la limite du quotient de ses termes de plus haut degré : $\frac{8x^3}{-x \cdot x^2} = -8$. Le piège B vient de $(2x)^3$ lu « $2x^3$ ».

■ Question 2

Réponse : A

Pour $x < 0$: $x^2 - 3x = x(x - 3) > 0$ (produit de deux négatifs), donc $|x^2 - 3x| = x^2 - 3x$; et $x|x| = -x^2$. Le numérateur vaut donc $-3x$: le quotient est constant, égal à -3 , sur $] -\infty, 0[$. La limite vaut -3 .

Méthode express : en $-\infty$, $x|x| = -x^2$ « tue » le terme x^2 ; écrire $x|x| = x^2$ mène au piège C.

■ Question 3

Réponse : D

Posons $u(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-x}$: $u(x) \rightarrow 2$ et, pour $x > 1$, $u(x) - 2 = \frac{2x+1}{x^2-x} > 0$, donc $u(x) \rightarrow 2^+$. Or $f(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 2^+$ (numérateur $\rightarrow 4$, dénominateur $\rightarrow 0^+$). Par composition, la limite vaut $+\infty$.

Méthode express : face à « $\frac{b}{0}$ » dans une composée, chercher le côté par lequel arrive la fonction intérieure.

■ Question 4

Réponse : A

Si $m \notin \{-1, 1\}$, le numérateur est de degré 2 et le dénominateur de degré 1 : limite infinie. Si $m = -1$: $f_{-1}(x) = 2x^2 + x - 1 \rightarrow +\infty$. Si $m = 1$: $f_1(x) = \frac{x+1}{2x-1} \rightarrow \frac{1}{2}$. Seul $m = 1$ convient.

Méthode express : seul $m = 1$ fait baisser le degré du numérateur ; $m = -1$ fait baisser celui du dénominateur, ce qui aggrave (piège B).

■ Question 5

Réponse : B

Pour $x < 0$, $x^2|x| = -x^3$ et $-x^3 + ax^2 = (x^2 + 1)(a - x) + x - a$, donc l'expression vaut $-(1+b)x + a + \frac{x-a}{x^2+1}$, où le dernier terme tend vers 0. Si $b \neq -1$, la limite est infinie ; si $b = -1$, elle vaut a . Donc $b = -1$ et $a = 3$.

Méthode express : la courbe doit admettre en $-\infty$ l'asymptote $y = -x + a$. Oublier que $|x| = -x$ donne le piège A.

■ Question 6

Réponse : C

Notons $N(x) = x^2 + mx + m^2 - 3$: $N(1) = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$, et $x-1 \rightarrow 0^+$. Si $N(1) < 0$, c'est-à-dire $-2 < m < 1$, la limite vaut $-\infty$; si $N(1) > 0$, elle vaut $+\infty$. Si $m = 1$: $N(x) = (x-1)(x+2)$ et la limite vaut 3 ; si $m = -2$: $N(x) = (x-1)^2$ et la limite vaut 0. Donc $m \in]-2, 1[$.

Méthode express : « $\frac{k}{0^+}$ » vaut $-\infty$ exactement quand $k < 0$; les cas $k = 0$ donnent ici des limites finies (pièges A et D).

■ Question 7

Réponse : 100

En développant : $(x+1)(x+3)\dots(x+19) = x^{10} + (1+3+\dots+19)x^9 + R(x)$, où R est un polynôme de degré au plus 8. Comme $1+3+\dots+19 = 100$, le quotient vaut $100 + \frac{R(x)}{x^9} \rightarrow 100$.

Méthode express : le coefficient de x^{n-1} dans $(x+a_1)\dots(x+a_n)$ vaut $a_1 + \dots + a_n$; la somme des 10 premiers impairs vaut 10^2 .

■ Question 8

Réponse : -36

Si $\frac{P(x)}{x^2}$ a une limite finie en 0, alors $P(0) = 0$, donc $P(x) = xR(x)$; puis $\frac{R(x)}{x} = \frac{P(x)}{x^2}$ a une limite finie en 0, donc $R(0) = 0$: x^2 divise P . De même, $(x-1)^2$ divise P . Comme $\deg P \leq 5$: $P(x) = x^2(x-1)^2(\alpha x + \beta)$. Alors $\frac{P(x)}{x^2} \rightarrow \beta = 1$ et $\frac{P(x)}{(x-1)^2} \rightarrow \alpha + \beta = 2$, d'où $\alpha = 1$: $P(x) = x^2(x-1)^2(x+1)$ et $P(-2) = 4 \times 9 \times (-1) = -36$.

2

Corrigés : formes indéterminées

■ Question 9

Réponse : B

Pour $x > 2$, avec la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+6x} - \sqrt{x^2-2x} = \frac{8x}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{8}{\sqrt{1+6/x}+\sqrt{1-2/x}} \rightarrow \frac{8}{2} = 4$.

Méthode express : en $+\infty$, $\sqrt{x^2+px} - x \rightarrow \frac{p}{2}$, d'où $3 - (-1) = 4$ (sans la division par 2 : piège C).

■ Question 10

Réponse : D

1 est racine double des deux polynômes : $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ et $x^4-4x+3 = (x-1)^2(x^2+2x+3)$. Pour $x \neq 1$, le quotient vaut $\frac{x+2}{x^2+2x+3} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Méthode express : si $P(1) = P'(1) = 0$, alors $(x-1)^2$ divise P : on factorise d'emblée par $(x-1)^2$.

■ Question 11

Réponse : A

Soit $n \geq 2$ et $S_n(x) = 1+x+\dots+x^{n-1}$, de sorte que $1-x^n = (1-x)S_n(x)$. Comme $n-S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-x^k)$: $\frac{n}{1-x^n} - \frac{1}{1-x} = \frac{n-S_n(x)}{(1-x)S_n(x)} = \frac{1}{S_n(x)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-x^k}{1-x} \rightarrow \frac{1}{n} (1+2+\dots+(n-1)) = \frac{n-1}{2}$. En retranchant les cas $n = 2$ et $n = 5$: la limite vaut $\frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

■ Question 12

Réponse : B

Avec $A = \sqrt[3]{x^3+3x^2}$ et $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$: $A-x = \frac{3x^2}{A^2+Ax+x^2} = \frac{3}{(A/x)^2+A/x+1} \rightarrow \frac{3}{3} = 1$, car $\frac{A}{x} = \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} \rightarrow 1$. De même $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} \rightarrow 2$. La limite vaut $1-2 = -1$.

Méthode express : en $+\infty$: $\sqrt[3]{x^3+px^2} - x \rightarrow \frac{p}{3}$ et $\sqrt{x^2+qx} - x \rightarrow \frac{q}{2}$.

■ Question 13

Réponse : C

Une limite finie impose $1+a+b=0$ (sinon forme « $\frac{k}{0}$ »). Alors $x^4+ax+b = (x^4-1) + a(x-1) = (x-1)(x^3+x^2+x+1+a)$, et il faut encore $4+a=0$. Donc $a=-4$, $b=3$, et $x^4-4x+3 = (x-1)^2(x^2+2x+3)$: la limite vaut $1+2+3=6$.

Méthode express : $P(x) = x^4+ax+b$ doit vérifier $P(1) = P'(1) = 0$, d'où directement $a=-4$ et $b=3$.

■ Question 14

Réponse : D

On retranche $1 + x$ aux deux racines. Avec $A = \sqrt[3]{1+3x}$: $A - (1+x) = \frac{A^3 - (1+x)^3}{A^2 + A(1+x) + (1+x)^2} = \frac{-3x^2 - x^3}{A^2 + A(1+x) + (1+x)^2}$, donc $\frac{A - (1+x)}{x^2} \rightarrow -\frac{3}{3} = -1$. Avec $B = \sqrt{1+2x}$: $B - (1+x) = \frac{-x^2}{B+1+x}$, donc $\frac{B - (1+x)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$. La limite vaut $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Méthode express : les deux racines ont la même tangente $y = 1 + x$ en 0 : seul l'écart à cette tangente compte (conclure « 0 » est le piège C).

■ Question 15

Réponse : -3

Pour $x < 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + 1} + 3x = -x \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 \right)$ tend vers l'infini si $a \neq 9$. Pour $a = 9$: $\sqrt{9x^2 + bx + 1} + 3x = \frac{bx+1}{\sqrt{9x^2+bx+1}-3x} = \frac{b+1/x}{-\sqrt{9+b/x+1/x^2}-3} \rightarrow -\frac{b}{6}$. Donc $b = -12$ et $a + b = -3$.

Méthode express : $9x^2 + bx + 1 = \left(3x + \frac{b}{6}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{36}$ et, en $-\infty$, $\left|3x + \frac{b}{6}\right| + 3x = -\frac{b}{6}$. Oublier $|x| = -x$ donne $b = 12$.

■ Question 16

Réponse : 4950

$x^{100} - 100x + 99 = (x^{100} - 1) - 100(x - 1) = (x - 1)(x^{99} + \dots + x + 1 - 100) = (x - 1)\sum_{k=1}^{99} (x^k - 1)$. Le quotient vaut donc $\sum_{k=1}^{99} \frac{x^k - 1}{x - 1}$, et chaque $\frac{x^k - 1}{x - 1}$ tend vers le nombre dérivé de $x \mapsto x^k$ en 1, soit k . Limite : $1 + 2 + \dots + 99 = 4950$.

Méthode express : $\frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} \rightarrow \frac{n(n-1)}{2}$ en 1.

3

Corrigés : trigonométrie

■ Question 17

Réponse : C

Pour $x \neq 0$, on divise par x : le numérateur devient $4 \frac{\sin 4x}{4x} + 2 \frac{\tan 2x}{2x} \rightarrow 4 + 2 = 6$ et le dénominateur $3 - \frac{\sin x}{x} \rightarrow 3 - 1 = 2$. La limite vaut $\frac{6}{2} = 3$.

Méthode express : chaque $\sin(ax)$ ou $\tan(ax)$ « apporte » le coefficient a . Oublier le $-\sin x$ du dénominateur donne le piège A.

■ Question 18

Réponse : B

Avec $u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$: $x \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$. Et $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ (gendarmes). La limite vaut $1 + 0 = 1$.

Méthode express : $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ seulement quand $u \rightarrow 0$; en $+\infty$, $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ (piège A).

■ Question 19

Réponse : A

Posons $u = 1 - \cos x$: $u \rightarrow 0$ et $u \neq 0$ pour $0 < |x| < 2\pi$. Alors $\frac{1 - \cos u}{x^4} = \frac{1 - \cos u}{u^2} \times \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

■ Question 20

Réponse : D

Posons $h = x - \pi \rightarrow 0$: $\sin 3x = \sin(3\pi + 3h) = -\sin 3h$ et $\tan 2x = \tan(2\pi + 2h) = \tan 2h$, donc $\frac{\sin 3x}{\tan 2x} = -\frac{3}{2} \times \frac{\sin 3h}{3h} \times \frac{2h}{\tan 2h} \rightarrow -\frac{3}{2}$.

Méthode express : $\sin(3\pi + t) = -\sin t$ mais $\tan(2\pi + t) = \tan t$: oublier le signe mène au piège A.

■ Question 21

Réponse : A

Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\cos x > 0$ et $1 - \sin x = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$, donc $\sqrt{1 - \sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ et $\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} = \sqrt{1 + \sin x} \rightarrow \sqrt{2}$.

Méthode express : à droite de $\frac{\pi}{2}$, $\cos x < 0$: la limite à droite vaut $-\sqrt{2}$ (piège B).

■ Question 22

Réponse : D

$\sin$ est 2π -périodique et n est entier, donc $\sin(2\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(2\pi(\sqrt{n^2+1} - n)) = \sin u_n$, où $u_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} > 0$ tend vers 0. Alors $n \sin u_n = \frac{\sin u_n}{u_n} \times \frac{2\pi}{\sqrt{1+1/n^2}+1} \rightarrow 1 \times \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Méthode express : retrancher la « période » $2\pi n$, puis utiliser la quantité conjuguée.

■ Question 23

Réponse : 15

Notons $c_k = \cos(kx)$: $1 - c_1 c_2 c_3 c_4 = (1 - c_1) + c_1(1 - c_2) + c_1 c_2(1 - c_3) + c_1 c_2 c_3(1 - c_4)$. Chaque $c_k \rightarrow 1$ et $\frac{1 - \cos(kx)}{x^2} = k^2 \frac{1 - \cos(kx)}{(kx)^2} \rightarrow \frac{k^2}{2}$. La limite vaut $\frac{1+4+9+16}{2} = 15$.

Méthode express : pour un produit de cosinus, les contributions $\frac{k^2}{2}$ s'ajoutent.

■ Question 24

Réponse : 3

On fait apparaître des facteurs $1 - \cos$: $\tan 2x - 2 \sin x = (\tan 2x - \sin 2x) + (\sin 2x - 2 \sin x) = \tan 2x(1 - \cos 2x) - 2 \sin x(1 - \cos x)$. Donc

$$\frac{\tan 2x - 2 \sin x}{x^3} = \frac{\tan 2x}{x} \times \frac{1 - \cos 2x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 2 \times 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

4

Corrigés : encadrements

■ Question 25

Réponse : B

Pour $x < 1$: $2 + \sin x \geq 1$, donc $x^2(2 + \sin x) \geq x^2$; en divisant par $x - 1 < 0$, l'inégalité change de sens : $\frac{x^2(2 + \sin x)}{x - 1} \leq \frac{x^2}{x - 1}$. Or $\frac{x^2}{x - 1} \rightarrow -\infty$ en $-\infty$: par comparaison, la limite vaut $-\infty$.

Méthode express : un facteur coincé entre deux constantes strictement positives ($1 \leq 2 + \sin x \leq 3$) ne change ni le signe ni le caractère infini.

■ Question 26

Réponse : D

Pour tout réel t : $t - 1 < E(t) \leq t$. Avec $t = \frac{1}{x}$: si $x > 0$, $1 - x < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$; si $x < 0$, multiplier par x renverse les inégalités : $1 \leq x E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$. Dans les deux cas, les gendarmes donnent la limite 1.

Méthode express : $\left| x E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right| = |x| \cdot \left| E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right| < |x| \rightarrow 0$.

■ Question 27

Réponse : C

Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin x < x < \tan x$, d'où $0 < \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x}$; ces quotients étant pairs, c'est encore vrai pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Donc $E\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$. Comme $\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1$, on a $1 < \frac{\tan x}{x} < 2$ au voisinage de 0, donc $E\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$. La limite vaut $0 + 1 = 1$.

Méthode express : en un entier n : $E(t) \rightarrow n$ si $t \rightarrow n^+$, mais $E(t) \rightarrow n - 1$ si $t \rightarrow n^-$. Ici $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1^-$ et $\frac{\tan x}{x} \rightarrow 1^+$.

■ Question 28

Réponse : A

Pour tout k : $k\sqrt{2} - 1 < E(k\sqrt{2}) \leq k\sqrt{2}$. En sommant, avec $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(k\sqrt{2}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$. Les deux bornes tendent vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (gendarmes).

Méthode express : les n erreurs, chacune inférieure à 1, pèsent au plus n : c'est négligeable devant n^2 .

■ Question 29

Réponse : D

Pour $x \geq 1$: $\sqrt{x^2 + x \sin x} - x = \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2 + x \sin x} + x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x/x} + 1} = g(x)$. Avec $x_n = 2n\pi$: $g(x_n) = 0$. Avec $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$: $g(y_n) = \frac{1}{\sqrt{1+1/y_n} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$. Deux suites tendant vers $+\infty$ donnent deux limites différentes : g n'a pas de limite en $+\infty$.

Méthode express : $g(x) - \frac{\sin x}{2} \rightarrow 0$: la fonction oscille comme $\frac{\sin x}{2}$. Croire que « $\sin x$ borné donne 0 » est le piège A.

■ Question 30

Réponse : C

Soit $x > 0$, $y = f(x)$ et $c = \sqrt[3]{x}$: $y(y^2 + 1) = x > 0$ impose $y > 0$, puis $y^3 < x$, soit $0 < y < c$. Comme $c^3 - y^3 = y$, on a $(c - y)(c^2 + cy + y^2) = y$; avec $t = \frac{y}{c}$: $c(c - y) = \frac{cy}{c^2 + cy + y^2} = \frac{t}{1+t+t^2}$. Or $t^3 = \frac{y^3}{x} = 1 - \frac{y}{x}$ et $0 < \frac{y}{x} < \frac{c}{x} = \frac{1}{c^2} \rightarrow 0$: $t^3 \rightarrow 1$, donc $t \rightarrow 1$ et la limite vaut $\frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$.

■ Question 31

Réponse : 19

Quand $x \rightarrow (\sqrt{2})^-$, $x^k \rightarrow (\sqrt{2})^k$ par valeurs inférieures. En un point non entier a , $E(t) \rightarrow E(a)$; en un entier n , $E(t) \rightarrow n - 1$ quand $t \rightarrow n^-$. Les puissances $\sqrt{2} \approx 1,41$; 2 ; $2\sqrt{2} \approx 2,83$; 4 ; $4\sqrt{2} \approx 5,66$; 8 donnent $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 = 19$.

Méthode express : les puissances paires 2^j sont entières et atteintes par valeurs inférieures : elles donnent $2^j - 1$ (et non 2^j , qui mènerait à 22).

■ Question 32

Réponse : 9

Sur $[0, 3]$, $E(x)$ et $E(x^2)$ ne sautent qu'aux points $\sqrt{m}$ ($0 \leq m \leq 9$) : ce sont les seuls points suspects. Si $m = 2, 3, 5, 6, 7, 8$: $E(x)$ est constante près de $\sqrt{m}$ et $E(x^2)$ saute de $m - 1$ à m : 6 discontinuités. En $n \in \{1, 2, 3\}$: à droite, $f \rightarrow n^2 - n^2 = 0 = f(n)$; à gauche, $f \rightarrow (n^2 - 1) - (n - 1)^2 = 2n - 2$: f est continue en 1, discontinue en 2 et en 3. En 0 : $f(x) = 0 - (-1)^2 = -1$ sur $]-1, 0[$ et $f(0) = 0$: discontinuité. Total : $6 + 2 + 1 = 9$.

5

Corrigés : continuité

■ Question 33

Réponse : B

Pour $x > 0$, la quantité conjuguée donne $f(x) = \frac{\sin(mx)}{x} (\sqrt{1+x} + 1) \rightarrow 2m$, car $\frac{\sin(mx)}{x} \rightarrow m$ (même si $m = 0$). Comme $\lim_{0^-} f = f(0) = 4$, f est continue en 0 si et seulement si $2m = 4$, soit $m = 2$.

Méthode express : $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \rightarrow \frac{1}{2}$ (nombre dérivé de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 1), donc $f(x) \rightarrow \frac{m}{1/2} = 2m$. Remplacer $\frac{1}{2}$ par 1 donne C.

■ Question 34

Réponse : D

Avec $t = \sqrt[6]{x} \rightarrow 1$: $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt{x} = t^3$ et, pour $t \neq 1$, $f(x) = \frac{t^2-1}{t^3-1} = \frac{t+1}{t^2+t+1} \rightarrow \frac{2}{3}$.

Méthode express : diviser haut et bas par $x - 1$ donne le quotient des nombres dérivés en 1 : $\frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$. Le piège A l'inverse.

■ Question 35

Réponse : A

$\sin(\pi \cos x) = \sin(\pi - \pi \cos x) = \sin u$ avec $u = \pi(1 - \cos x) \rightarrow 0$ et $u \neq 0$ pour $x \neq 0$ proche de 0. Par composée, $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$, donc $\frac{\sin(\pi \cos x)}{x^2} = \frac{\sin u}{u} \times \pi \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Méthode express : on se ramène en 0 par $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$; le signe est + car $0 < \pi \cos x < \pi$ (piège C).

■ Question 36

Réponse : C

P est continue, $P(0) = -1 < 0$ et $P(x) \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$: il existe $A > 0$ tel que $P(-A) > 0$ et $P(A) > 0$, et le TVI sur $[-A, 0]$ et sur $[0, A]$ donne C. Contre-exemples : $(x^2 - 1)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 1$ a quatre racines (A et B fausses) ; $x^4 - \frac{15}{4}x^2 - 1 = (x^2 - 4)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$ n'a que ± 2 pour racines (D fausse).

■ Question 37

Réponse : B

Avec $A = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2} : \frac{A}{x} \rightarrow 1$ et $A - x = \frac{A^3 - x^3}{A^2 + Ax + x^2} = \frac{6}{(A/x)^2 + A/x + 1} \rightarrow 2$; de plus $\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{\sqrt{1+1/x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$. La limite vaut $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Méthode express : en $+\infty$, $\sqrt[3]{x^3 + px^2} - x \rightarrow \frac{p}{3}$ et $\sqrt{x^2 + qx} - x \rightarrow \frac{q}{2}$. Diviser 6 par 2 donne le piège A.

■ Question 38

Réponse : A

g est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, donc $y = g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $x = y + \sqrt{y}$. Ainsi $g(x) - x + \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{y} - \sqrt{y} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} + \sqrt{y} + \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{y}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Méthode express : pour une limite de réciproque, tout exprimer en fonction de $y = g(x)$.

■ Question 39

Réponse : 45

$x^{10} - 10x + 9 = (x^{10} - 1) - 10(x - 1) = (x - 1) \sum_{k=1}^9 (x^k - 1)$ et $x^k - 1 = (x - 1)(1 + x + \dots + x^{k-1})$. Pour $x \neq 1$: $f(x) = \sum_{k=1}^9 (1 + x + \dots + x^{k-1}) \rightarrow 1 + 2 + \dots + 9 = 45$.

Méthode express : 1 est racine double de $x^n - nx + n - 1$ et le prolongement vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

■ Question 40

Réponse : 12

Avec $a = \cos 2x$, $b = \sqrt{\cos 4x}$, $c = \sqrt[3]{\cos 6x}$, qui tendent vers 1 : $1 - abc = (1 - a) + a(1 - b) + ab(1 - c)$. Comme $\frac{1 - \cos kx}{x^2} \rightarrow \frac{k^2}{2} : \frac{1-a}{x^2} \rightarrow 2$, $\frac{1-b}{x^2} = \frac{1 - \cos 4x}{x^2(1+b)} \rightarrow \frac{8}{2} = 4$ et $\frac{1-c}{x^2} = \frac{1 - \cos 6x}{x^2(1+c+c^2)} \rightarrow \frac{18}{3} = 6$. Donc $f(x) \rightarrow 12$.

Méthode express : le facteur $\sqrt[p]{\cos kx}$ apporte $\frac{k^2}{2p} : \frac{4}{2} + \frac{16}{4} + \frac{36}{6} = 12$.

6

Corrigés : nombre dérivé

■ Question 41

Réponse : C

$\frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} = \frac{2}{3} \times \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} \rightarrow \frac{2}{3} \left(-\sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Méthode express : factoriser 2 en haut et 3 en bas révèle le taux d'accroissement de $\cos$ en $\frac{\pi}{3}$. Oublier le 3 donne A, oublier les deux donne B.

■ Question 42

Réponse : A

Dérivable en 1 implique continue en 1 : $a + b = f(1) = 1$. Puis $f'_d(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ et $f'_g(1) = 2a + b$. Le système $a + b = 1$, $2a + b = \frac{1}{2}$ donne $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. (Les quatre propositions assurent la continuité.)

■ Question 43

Réponse : D

$x \sin a - a \sin x = (x - a) \sin a - a(\sin x - \sin a)$, donc le quotient vaut $\sin a - a \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \rightarrow \sin a - a \cos a$ (taux d'accroissement de $\sin$ en a).

Méthode express : ajouter et retrancher $a \sin a$: c'est la technique type des quotients de différences. Le piège A a le mauvais signe.

■ Question 44

Réponse : B

$\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x} \sqrt{1+2x}$ est dérivable en 0 et $\varphi(0) = 1$: la limite est $\varphi'(0) = \frac{1}{3} \times 1 + 1 \times \frac{2}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Méthode express : pour un produit de facteurs valant 1 en 0, les nombres dérivés s'ajoutent ; les multiplier donne A, oublier le 2 donne C.

■ Question 45

Réponse : C

$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$, donc $f(x) = |x-2|\sqrt{x+1}$ et $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{|x-2|}{x-2} \sqrt{x+1} \rightarrow \pm\sqrt{3}$ quand $x \rightarrow 2^\pm$. Demi-tangentes de coefficients directeurs $-\sqrt{3}$ (à gauche) et $\sqrt{3}$ (à droite).

Méthode express : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ne vaut pas là où $u = 0$: on revient au taux d'accroissement (pièges A et B).

■ Question 46

Réponse : D

Soit $g(u) = \sqrt{u} - \sqrt[3]{u}$: $g(1) = 0$ et $g'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Pour $x \neq 0$ proche de 0, $\cos x \neq 1$ et le quotient s'écrit $\frac{g(\cos x) - g(1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x}$. Le premier facteur tend vers $g'(1) = \frac{1}{6}$ (composée), le second vaut $-\frac{1}{1+\cos x} \rightarrow -\frac{1}{2}$. Limite : $-\frac{1}{12}$.

Méthode express : avec $u = \cos x$, le quotient vaut $-\frac{g(u)-g(1)}{u-1} \times \frac{1}{1+u}$: signe - (piège A) et facteur $\frac{1}{2}$ (piège B).

■ Question 47

Réponse : -3

Avec $N(x) = \tan^3 x$ et $D(x) = \cos 2x$: $N\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $D\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $N'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \tan^2 \frac{\pi}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) = 6$ et $D'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$. En divisant haut et bas par $x - \frac{\pi}{4}$, la limite vaut $\frac{N'(\pi/4)}{D'(\pi/4)} = \frac{6}{-2} = -3$.

Méthode express : avec $t = \tan x$: $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et le quotient vaut $-\frac{(t^2+t+1)(1+t^2)}{1+t} \rightarrow -\frac{3 \times 2}{2} = -3$.

■ Question 48

Réponse : 7

Là où $\sin x$, $\sin 2x$ et $\sin 3x$ ne s'annulent pas, f est localement une somme de $\pm \sin(kx)$: elle y est dérivable. Les zéros dans $]0, 2\pi[$ sont π ; $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$: 7 points distincts. En un zéro a de $\sin(kx)$, $|\sin(kx)|$ a pour nombres dérivés à droite et à gauche $\pm k |\cos(ka)| = \pm k$, d'où un saut $f_d'(a) - f_g'(a) = 2k > 0$. Ces sauts positifs ne se compensent pas (même en π) : f n'est pas dérivable en ces 7 points.

Méthode express : compter les zéros distincts, sans compter π trois fois (piège 9).

7

Corrigés : branches infinies

■ Question 49

Réponse : D

$2x^2 - 3x + 1 = (x+1)(2x-5) + 6$, donc $f(x) = 2x - 5 + \frac{6}{x+1}$ et $f(x) - (2x-5) \rightarrow 0$ en $+\infty$: asymptote $y = 2x - 5$.

Méthode express : $a = \lim \frac{f(x)}{x} = 2$, puis $b = \lim (f(x) - 2x) = \lim \frac{-5x+1}{x+1} = -5$. Le piège A recopie le -3 du numérateur.

■ Question 50

Réponse : B

Pour $x \notin \{1, 2\}$, $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$. En 1, $f(x) \rightarrow -2$: la droite $x = 1$ n'est pas asymptote (f se prolonge par continuité). En 2, $f(x) \rightarrow \pm\infty$: asymptote $x = 2$. En $\pm\infty$, $f(x) \rightarrow 1$: asymptote $y = 1$. Total : 2 (le piège C compte $x = 1$).

■ Question 51

Réponse : A

Pour $x \leq -2$: $f(x) = \frac{x^2 - (x^2 + 2x)}{x - \sqrt{x^2 + 2x}}$ et, comme $x < 0$, $\sqrt{x^2 + 2x} = -x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}$, d'où $f(x) = \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + 2/x}} \rightarrow -1$: asymptote horizontale $y = -1$.

Méthode express : $\sqrt{x^2 + 2x} = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x}}$ avec $|x| = -x$: les deux termes se compensent. $y = 2x + 1$ (piège B) est l'asymptote en $+\infty$.

■ Question 52

Réponse : C

$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = \frac{x\sqrt{x}}{f(x)+x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction la droite $y = x$, sans asymptote.

Méthode express : $\sqrt{x^2 + u} - x = \frac{u/x}{\sqrt{1+u/x^2}+1}$ n'a de limite finie que si $\frac{u}{x}$ en a une ; ici $\frac{u}{x} = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$.

■ Question 53

Réponse : B

$x^3 - 2x^2 + 3x = (x^2 + 1)(x - 2) + 2x + 2$, donc $f(x) = x - 2 + \frac{2x+2}{x^2+1}$: l'asymptote oblique (en $\pm\infty$) est $y = x - 2$, et $f(x) - (x - 2) = \frac{2(x+1)}{x^2+1} > 0 \iff x > -1$.

Méthode express : le signe de $f(x) - (ax + b)$ est celui du reste $2x + 2$, puisque $x^2 + 1 > 0$.

■ Question 54

Réponse : A

Domaine : $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. En 1^+ , $f(x) \rightarrow +\infty$: asymptote $x = 1$; $f(-1) = 0$: pas d'asymptote en -1 . En $\pm\infty$, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ et $f(x) - x = x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = \frac{x}{x-1} \times \frac{2}{\sqrt{(x+1)/(x-1)}+1} \rightarrow 1$: la seule asymptote oblique est $y = x + 1$, des deux côtés.

Méthode express : le facteur x est hors de la racine : il garde son signe, rien ne change en $-\infty$ (piège B).

■ Question 55

Réponse : 31

$|f(x) - x| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$: l'asymptote est $y = x$. Les points communs vérifient $\sin x = 0$, soit $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq \frac{100}{\pi} \approx 31,8$: il y en a 31.

Méthode express : une courbe peut couper son asymptote une infinité de fois.

■ Question 56

Réponse : -12

Avec $y = g(x)$: $y \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $x = f(y) = \frac{y}{2} + 3 + \frac{1}{y}$. Donc $\frac{g(x)}{x} = \frac{y}{y/2 + 3 + 1/y} \rightarrow 2$ et $g(x) - 2x = y - \left(y + 6 + \frac{2}{y}\right) = -6 - \frac{2}{y} \rightarrow -6$. Asymptote $y = 2x - 6$: $ab = 2 \times (-6) = -12$.

Méthode express : les courbes de f et g sont symétriques par rapport à $y = x$: l'asymptote $y = \frac{x}{2} + 3$ de f devient $x = \frac{y}{2} + 3$, soit $y = 2x - 6$.

8

Corrigés : limites de suites

■ Question 57

Réponse : C

Soit $q = \frac{2x}{x^2+1}$. Comme $x^2 + 1 - 2|x| = (|x| - 1)^2 \geq 0$, $|q| \leq 1$, avec égalité si et seulement si $|x| = 1$. Si $|x| \neq 1$, $q^n \rightarrow 0$; si $x = 1$, $q^n = 1$; si $x = -1$, $((-1)^n)$ diverge. Ensemble : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Méthode express : (q^n) converge si et seulement si $-1 < q \leq 1$: n'oublier ni le cas $q = 1$ (piège D) ni le cas $q = -1$ (piège B).

■ Question 58

Réponse : D

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \rightarrow 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

Méthode express : une somme géométrique de premier terme 1 et de raison $q \in]-1, 1[$ tend vers $\frac{1}{1-q}$. Prendre $q = \frac{1}{3}$ au lieu de $-\frac{1}{3}$ donne A.

■ Question 59

Réponse : A

$u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2$: $v_n = u_n - 1$ vérifie $v_{n+1} = v_n^2$ et $v_0 = -\frac{1}{2}$, donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 1$ (car $2^n \geq n$). Ainsi $v_n \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow 1$.

Méthode express : les points fixes sont 1 et 2 ; l'écart à 1 est élevé au carré à chaque étape (piège B).

■ Question 60

Réponse : B

Pour tout k , $k\sqrt{2} - 1 < E(k\sqrt{2}) \leq k\sqrt{2}$; en sommant, le numérateur S_n vérifie $\sqrt{2} \frac{n(n+1)}{2} - n < S_n \leq \sqrt{2} \frac{n(n+1)}{2}$. Divisées par n^2 , les deux bornes tendent vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$: c'est la limite (gendarmes).

Méthode express : la partie entière fait perdre moins de 1 par terme, donc moins de n au total, et $\frac{n}{n^2} \rightarrow 0$ (piège D).

■ Question 61

Réponse : D

$5^n \leq 2^n + 5^n \leq 2 \times 5^n$ et $4^n \leq 3^n + 4^n \leq 2 \times 4^n$, donc la suite étudiée w_n vérifie $\frac{5}{4} \times \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \leq w_n \leq \frac{5}{4} \sqrt[n]{2}$. Or $1 \leq \sqrt[n]{2} \leq 1 + \frac{1}{n}$ car $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \times \frac{1}{n} = 2$: $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ et $w_n \rightarrow \frac{5}{4}$.

Méthode express : seules les plus grandes bases comptent : 5 en haut, 4 en bas.

■ Question 62

Réponse : C

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$ car $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$: (u_n) décroît. De même $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$; par télescopage $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$, donc $u_n > -2$. Décroissante et minorée, (u_n) converge.

Méthode express : les deux termes tendent vers $+\infty$: on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, puis on minore.

■ Question 63

Réponse : -4

On cherche une suite $an + b$ vérifiant la relation : $a(n+1) + b = \frac{1}{2}(an + b) + n$ donne $a = 2$, $b = -4$. Alors $v_n = u_n - 2n + 4$ vérifie $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} + n - 2n - 2 + 4 = \frac{1}{2}v_n$, donc $v_n = \frac{11}{2^n} \rightarrow 0$ et $u_n - 2n = v_n - 4 \rightarrow -4$.

Méthode express : la limite ne dépend pas de u_0 : l'écart à $2n - 4$ est divisé par 2 à chaque étape.

■ Question 64

Réponse : 6

On cherche $F(k) = \frac{k^2 + \alpha k + \beta}{2^k}$ telle que $F(k-1) - F(k) = \frac{k^2}{2^k}$. Comme $F(k-1) - F(k) = \frac{k^2 + (\alpha-4)k + 2-2\alpha+\beta}{2^k}$, il faut $\alpha = 4$, $\beta = 6$. Par télescopage, $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} = F(0) - F(n) = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$. Pour $n \geq 3$, $2^n = (1+1)^n \geq \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, donc $\frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \rightarrow 0$: la limite vaut 6.

9

Corrigés : avec le logarithme

■ Question 65

Réponse : C

Pour $x \neq 0$ voisin de 0 : $\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1-3x)} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{-3x}{\ln(1-3x)} \times \frac{2x}{-3x}$. Les deux premiers facteurs tendent vers 1 (limite de référence $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$), donc la limite vaut $-\frac{2}{3}$.

Méthode express : on divise chaque logarithme par son « u » : il reste $\frac{2x}{-3x} = -\frac{2}{3}$. Le piège A oublie le signe.

■ Question 66

Réponse : A

$\ln(3n+1) = \ln n + \ln\left(3 + \frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{\ln(3n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(3+1/n)}{\ln n}$. Le numérateur de la dernière fraction tend vers $\ln 3$ et son dénominateur vers $+\infty$: la limite vaut 1.

■ Question 67

Réponse : D

$\frac{x+1}{x-1} = 1 + h$ avec $h = \frac{2}{x-1} \rightarrow 0$, donc $x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2x}{x-1} \times \frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow 2 \times 1 = 2$.

Méthode express : $x \ln \frac{x+1}{x-1} = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 - (-1) = 2$.

■ Question 68

Réponse : B

Posons $x = s^{10000}$ ($s \rightarrow +\infty$) : $(\ln x)^{100} = (10^4 \ln s)^{100}$ et $\sqrt[100]{x} = s^{100}$, d'où $\frac{(\ln x)^{100}}{\sqrt[100]{x}} = 10^{400} \left(\frac{\ln s}{s}\right)^{100} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Les valeurs de l'énoncé trompent : le quotient ne devient petit que pour des x gigantesques.

Méthode express : toute puissance de $\ln x$ est écrasée en $+\infty$ par toute racine de x .

■ Question 69

Réponse : C

Pour $x \in]0, 1[$: $\ln x \cdot \ln(1-x) = \frac{\ln x}{x-1} \times (x-1) \ln(1-x)$. Le premier facteur tend vers $\ln'(1) = 1$ (nombre dérivé) ; avec $t = 1-x \rightarrow 0^+$, le second vaut $-t \ln t \rightarrow 0$ (croissances comparées). La limite vaut 0.

■ Question 70

Réponse : A

$(1+x+x^2)(1-x+x^2) = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+x^2+x^4$: le numérateur vaut $\ln(1+u)$ avec $u = x^2+x^4 \rightarrow 0$, et le quotient vaut $\frac{\ln(1+u)}{u} \times (1+x^2) \rightarrow 1$.

Méthode express : regrouper les logarithmes AVANT de passer à la limite. Le piège B remplace chaque $\ln(1+v)$ par v , ce qui n'est pas justifié dans une somme : les erreurs commises sont ici du même ordre que x^2 .

■ Question 71

Réponse : -2

$\ln(\cos 2x) = \ln(1+u)$ avec $u = \cos 2x - 1 \rightarrow 0$, donc $\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \frac{\ln(1+u)}{u} \times \frac{\cos 2x - 1}{x^2}$, et $\frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -4 \times \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \rightarrow -4 \times \frac{1}{2} = -2$. La limite vaut -2.

■ Question 72

Réponse : 2

Pour $u \geq 0$: $u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$ (les fonctions $u - \ln(1+u)$ et $\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$ sont nulles en 0, de dérivées $\frac{u}{1+u} \geq 0$ et $\frac{u^2}{1+u} \geq 0$). Avec $u = \frac{k}{n^2}$, en sommant : $A_n - B_n \leq S_n \leq A_n$, où $A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2} = \frac{2n(2n+1)}{2n^2} \rightarrow 2$ et $0 \leq B_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{2n^4} \leq 2n \times \frac{(2n)^2}{2n^4} = \frac{4}{n}$. Par les gendarmes, $S_n \rightarrow 2$.

Méthode express : chaque terme vaut presque $\frac{k}{n^2}$; les $2n$ erreurs, chacune au plus $\frac{2}{n^2}$, disparaissent.

10

Corrigés : avec l'exponentielle

■ Question 73

Réponse : D

On divise par e^x : $\frac{x^3+e^x}{x^3-e^x} = \frac{x^3e^{-x}+1}{x^3e^{-x}-1}$. Par croissances comparées, $x^3e^{-x} \rightarrow 0$: la limite vaut $\frac{1}{-1} = -1$.

Méthode express : en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance : il reste $\frac{e^x}{-e^x}$. Le piège A oublie le signe.

■ Question 74

Réponse : C

En 0^+ : $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ (pas de forme indéterminée), donc $e^{\frac{\ln x}{x}} \rightarrow 0$. En $+\infty$: $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^0 = 1$.

Méthode express : ne pas confondre avec $x^x \rightarrow 1$ en 0^+ : ici l'exposant $\frac{1}{x}$ explose et « $0^{+\infty} = 0$ ».

■ Question 75

Réponse : A

$x^{\frac{1}{1-x}} = \exp\left(-\frac{\ln x}{x-1}\right)$ et $\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow \ln'(1) = 1$ quand $x \rightarrow 1$. Par continuité de $\exp$, la limite vaut $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Méthode express : avec $h = x - 1$, c'est $(1+h)^{-1/h}$, l'inverse de la forme qui donne e . Le piège B oublie le signe.

■ Question 76

Réponse : D

Avec $h = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0^+$: $e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}(e^h - 1) = \frac{e^h - 1}{h} \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$. Les trois facteurs tendent vers 1, $+\infty$ (croissances comparées, $X = \sqrt{x}$) et $\frac{1}{2}$: la limite est $+\infty$. Le piège A s'arrête à « $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \rightarrow 0$ ».

■ Question 77

Réponse : C

Posons $u = \frac{1}{n}$ et $\varphi(u) = \ln \frac{2^u+3^u}{2}$, dérivable, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(u) = \frac{2^u \ln 2 + 3^u \ln 3}{2^u+3^u}$, donc $\varphi'(0) = \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} = \ln \sqrt{6}$. Alors $\left(\frac{\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3}}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{\varphi(u) - \varphi(0)}{u}\right) \rightarrow e^{\ln \sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Méthode express : forme 1^∞ : $a_n^n = e^{n \ln a_n}$, et $n \ln a_n$ a même limite que $n(a_n - 1)$, qui vaut $\frac{1}{2} \left[n(\sqrt[2]{2} - 1) + n(\sqrt[3]{3} - 1) \right]$ et tend vers $\frac{\ln 2 + \ln 3}{2}$.

■ Question 78

Réponse : B

$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = \exp\left(2 \times \frac{\ln(1+h)}{h}\right)$ avec $h = \frac{2}{x} \rightarrow 0$. L'exposant tend vers 2 : la limite vaut e^2 .

Méthode express : retenir $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \rightarrow e^a$. Le piège A croit que « $1^\infty = 1$ ».

■ Question 79

Réponse : 9

$e^{3x} + e^{-3x} - 2 = e^{-3x}(e^{6x} - 2e^{3x} + 1) = e^{-3x}(e^{3x} - 1)^2$, donc le quotient vaut $e^{-3x} \left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^2 \rightarrow 1 \times 3^2 = 9$.

Méthode express : identité remarquable cachée : $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a}$ avec $a = e^{3x}$.

■ Question 80

Réponse : 4

$f(x) - x = (\sqrt{x^2+4x} - x)e^{\frac{2}{x}} + x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$. D'une part $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x} + x} = \frac{4}{\sqrt{1+4/x} + 1} \rightarrow 2$ et $e^{\frac{2}{x}} \rightarrow 1$; d'autre part $x(e^{\frac{2}{x}} - 1) = 2 \times \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 2$ avec $h = \frac{2}{x}$. Donc $b = 2 + 2 = 4$.

Méthode express : avec $h = \frac{1}{x}$ et $g(h) = \sqrt{1+4h} e^{2h}$: $f(x) - x = \frac{g(h) - g(0)}{h} \rightarrow g'(0) = 2 + 2 = 4$.

11 Corrigés : sommes et intégrales

■ Question 81

Réponse : B

Pour $x \in [0, 1]$: $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$, donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Par les gendarmes, $I_n \rightarrow 0$. Le piège A est la valeur de I_0 .

■ Question 82

Réponse : A

$\int_0^{2x} \sin t dt = [-\cos t]_0^{2x} = 1 - \cos 2x$, donc le quotient vaut $\frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 4 \times \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \rightarrow 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

■ Question 83

Réponse : D

Écrivons $\frac{1}{\ln t} = t \times \frac{1}{t \ln t}$; une primitive de $\frac{1}{t \ln t}$ est $\ln |\ln t|$, donc $\int_x^{x^3} \frac{dt}{t \ln t} = \ln |3 \ln x| - \ln |\ln x| = \ln 3$. Si $x > 1$, pour $t \in [x, x^3]$: $\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^3}{t \ln t}$, d'où $x \ln 3 \leq F(x) \leq x^3 \ln 3$. Si $0 < x < 1$, on obtient de même (en intégrant sur $[x^3, x]$ la fonction positive $\frac{-1}{\ln t}$) $x^3 \ln 3 \leq F(x) \leq x \ln 3$. Par les gendarmes, $F(x) \rightarrow \ln 3$.

■ Question 84

Réponse : C

Par parties : $I_{n+1} = [x^{n+1} e^x]_0^1 - (n+1)I_n = e - (n+1)I_n$ pour $n \geq 0$. Comme $0 \leq I_{n+1} \leq e \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{e}{n+2}$, $I_{n+1} \rightarrow 0$, donc $(n+1)I_n = e - I_{n+1} \rightarrow e$ et $nI_n = \frac{n}{n+1} \times (n+1)I_n \rightarrow e$.

Méthode express : nI_n tend vers la valeur en 1 du facteur qui multiplie x^n : ici $e^1 = e$.

■ Question 85

Réponse : B

$n(1 - J_n) = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx$. Par parties ($u = x$, $v = \ln(1+x^n)$) : $n(1 - J_n) = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$. Or $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, donc $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. La limite vaut $\ln 2$.

■ Question 86

Réponse : A

Notons P_n ce nombre : $\ln P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - \ln n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$, somme de Riemann de $f(x) = \ln(1+x)$, continue sur $[0, 1]$. Donc $\ln P_n \rightarrow \int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 = 2 \ln 2 - 1$, et $P_n \rightarrow e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

Méthode express : le logarithme transforme le produit en somme de Riemann ; le piège B oublie de revenir à l'exponentielle.

■ Question 87

Réponse : 6

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ décroît, donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k \geq 1$) et $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}$ ($k \geq 2$). En sommant jusqu'à N : $2\sqrt{N+1} - 2 \leq S_N \leq 1 + (2\sqrt{N} - 2)$. Avec $N = 9n$: $\frac{2\sqrt{9n+1}-2}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_{9n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{6\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$; les deux bornes tendent vers 6.

Méthode express : à une constante près, la somme vaut $\int_1^{9n} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{9n} - 2 \approx 6\sqrt{n}$.

■ Question 88

Réponse : 4

Pour $t > 0$: $t < \sqrt{t^2+1} \leq t+1$. En intégrant sur $[x, 3x]$, avec $\int_x^{3x} t dt = \frac{9x^2 - x^2}{2} = 4x^2$: $4x^2 \leq \int_x^{3x} \sqrt{t^2+1} dt \leq 4x^2 + 2x$. Le quotient est compris entre 4 et $4 + \frac{2}{x}$: la limite vaut 4.

Méthode express : pour t grand, $\sqrt{t^2+1}$ est très proche de t : on intègre t sur $[x, 3x]$.

12

Corrigés : défis de concours

■ Question 89

Réponse : C

$\frac{4^x-1}{8^x-1} = \frac{e^{x \ln 4}-1}{x \ln 4} \times \frac{x \ln 8}{e^{x \ln 8}-1} \times \frac{\ln 4}{\ln 8}$; les deux premiers facteurs tendent vers 1 et $\frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{2 \ln 2}{3 \ln 2} = \frac{2}{3}$.

Méthode express : $\frac{a^x-1}{x} \rightarrow \ln a$ (nombre dérivé de $x \mapsto a^x$ en 0). Le piège A calcule $\frac{4}{8}$.

■ Question 90

Réponse : B

Les tirages sont indépendants et chacun donne une boule non rouge avec la probabilité $1 - \frac{1}{n}$: $p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Or $n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln(1+h)}{h} \rightarrow -1$ avec $h = -\frac{1}{n}$, donc $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1}$ et $p_n \rightarrow 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$.

Méthode express : $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a$ avec $a = -1$. Le piège A croit qu'avec n essais, la réussite est certaine.

■ Question 91

Réponse : D

Posons $v_n = u_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: par π -périodicité, $\tan v_n = \tan u_n = u_n > 0$, donc $v_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan v_n = u_n > n\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$. Ainsi $\cos v_n = \frac{\sin v_n}{\tan v_n} \leq \frac{1}{\tan v_n} \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$: si l'on avait $v_n \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, la décroissance de $\cos$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donnerait $\cos v_n \geq \sin \varepsilon > 0$, ce qui est faux pour n grand. Donc $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < v_n < \frac{\pi}{2}$ à partir d'un certain rang : $v_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Méthode express : la droite $y = x$ coupe chaque branche de $\tan$ de plus en plus haut, donc de plus en plus près de l'asymptote $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$.

■ Question 92

Réponse : A

Soit $g(x) = x^e - e^x = e^{e \ln x} - e^x$, dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $g(e) = 0$. La limite est le nombre dérivé $g'(e)$; or $g'(x) = e x^{e-1} - e^x$, donc $g'(e) = e \times e^{e-1} - e^e = 0$.

Méthode express : x^e et e^x ont même valeur et même pente en $x = e$: leurs courbes y sont tangentes.

■ Question 93

Réponse : C

$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + v$ avec $v = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \rightarrow 0$. L'exposant vaut $x \ln x \cdot \ln(1+v) = x \ln x \cdot v \cdot \frac{\ln(1+v)}{v} = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. $\frac{\ln(1+v)}{v} \rightarrow 1 \times 1 = 1$. La limite vaut $e^1 = e$.

Méthode express : forme 1^∞ : $(1+v)^N = e^{N \ln(1+v)}$ et $N \ln(1+v)$ a même limite que $Nv = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$.

■ Question 94

Réponse : D

Sur $[1, +\infty[$, $g_n(x) = x^n - x - 1$ est strictement croissante, et $g_{n+1}(x_n) = x_n(x_n + 1) - x_n - 1 = x_n^2 - 1 > 0$, donc $x_{n+1} < x_n$: la suite décroît et est minorée par 1, elle converge vers $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, $x_n^n \geq \ell^n \rightarrow +\infty$ alors que $x_n + 1 \leq x_2 + 1$: absurde, donc $\ell = 1$. Enfin $n \ln x_n = \ln(x_n + 1) \rightarrow \ln 2$ et $n(x_n - 1) = n \ln x_n \times \frac{x_n - 1}{\ln x_n} \rightarrow \ln 2 \times 1 = \ln 2$.

■ Question 95

Réponse : 2

Les termes $k = 0$ et $k = n$ valent 1, les termes $k = 1$ et $k = n - 1$ valent $\frac{1}{n}$. Les coefficients croissent puis décroissent ($\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1}$), donc pour $n \geq 4$ et $2 \leq k \leq n - 2$: $C_n^k \geq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi $2 + \frac{2}{n} \leq S_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$, et $S_n \rightarrow 2$.

Méthode express : seuls les deux termes extrêmes comptent : $1 + 1 = 2$.

■ Question 96

Réponse : 4

Les $2n + 1$ nombres C_{2n}^k ($0 \leq k \leq 2n$) ont pour somme $2^{2n} = 4^n$ et le plus grand est $C_{2n}^n : \frac{4^n}{2n+1} \leq C_{2n}^n \leq 4^n$, puis $4 e^{-\ln(2n+1)/n} \leq \sqrt[n]{C_{2n}^n} \leq 4$. Comme $\frac{\ln(2n+1)}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées), les gendarmes donnent la limite 4.

Méthode express : un facteur polynomial en n disparaît dans une racine n -ième : $\sqrt[n]{2n+1} \rightarrow 1$.

Mon bilan

Mes scores série par série

Série	Bonnes	QCM faux	Sans réponse	Score
1 Limites usuelles et opérations				/ 32
2 Formes indéterminées et racines				/ 32
3 Limites trigonométriques				/ 32
4 Encadrements et partie entière				/ 32
5 Continuité et prolongement				/ 32
6 Limites et nombre dérivé				/ 32
7 Branches infinies				/ 32
8 Limites de suites				/ 32
9 Limites avec le logarithme				/ 32
10 Limites avec l'exponentielle				/ 32
11 Limites de sommes et d'intégrales				/ 32
12 Défis de concours				/ 32
Total				/ 384

Où j'en suis

Plus de 250 points : niveau concours, continue avec les défis de niveau 4 des livrets de chapitres.

De 150 à 250 points : bon niveau ; refais au chrono les séries où tu as moins de 20 points.

Moins de 150 points : reprends le cours et les méthodes des chapitres concernés, puis refais la série une semaine plus tard.

Bonne préparation !

Maths Olympiad