



RÉVISION 1

Exercices 1

1. Calculer les limites suivants :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - \sqrt{x - \sqrt{x}} - 1}{(x-1)^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

2. Calculer et simplifier $A = \frac{2^{\frac{5}{3}} 3^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}}\right)^3}{\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\sqrt[5]{3^{-3}}\right)^4}$: $B = \frac{\sqrt[4]{9} \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivants :

$$(a) (E_1) : \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x+2} = 2$$

$$(b) (E_2) : \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$$

4. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + x + b}{x^2 - 1} & x < 1 \\ g(1) = a \\ g(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} & x > 1 \end{cases}$$

où a et b sont deux réels.

Déterminer tous a et b pour lesquels la fonction g est continue en 1.

Exercices 2

Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1 - \cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Montrer que : pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3. (a) Montrer que f est continue en 0.

(b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$

(b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25

(c) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}$



RÉVISION 1

Exercices 3

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$$

- (a) étudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction h puis interpréter le résultat obtenu.
(b) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et en déduire la monotonie de la fonction h .
- (a) Montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une solution unique δ dans l'intervalle $]0; 1[$.
(b) En utilisant la méthode de dichotomie, déterminer un encadrement de δ d'amplitude 0,25.
- (a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
(b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 1 et que :

$$(h^{-1})'(1) = \frac{\delta}{1 - 2\delta}$$

- Déterminer l'approximation affine de la fonction h^{-1} au voisinage de 1.

Exercices 4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
- Montrez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interprétez géométriquement le résultat.
- Montrer que $f'(x) = \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, puis établissez le tableau de variations de f .
- écrivez l'équation de la tangente à la courbe C_f au point $A(1, 0)$.
- Soit g la fonction définie sur $I = \left[\frac{1}{8}, +\infty\right[$ par :

$$g(x) = f(x)$$

- Montrez que g admet une fonction réciproque de I vers un ensemble J à déterminer.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $g^{-1}(x) < 1$
- Déterminez $g^{-1}(x)$ où $x \in J$.
- Calculer $(g^{-1})'(0)$.
- Comparer $g^{-1}(\sqrt[3]{4})$ et $g^{-1}(\sqrt[3]{3})$.