

Série n°1

- Continuité -

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+x+5}$ | 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x-2}{x^2+1}$ | 14 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}$ |
| 2 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x^2 + x - 8$ | 9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - x$ | 15 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2}$ |
| 3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5}$ | 10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$ | 16 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2x^2}{x-x^3}$ |
| 4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 - 2x^2 + x - 1$ | 11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$ | 17 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2 + x - 1} + 2x$ |
| 5 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ | 12 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$ | 18 $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^2-4}$ |
| 6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$ | 13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$ | |
| 7 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+7} - x$ | | |

Exercice 2

Étudier la continuité de f en a dans chacun des cas suivants :

- | | |
|--|---|
| 1 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^4-1}{x+1}; & x \neq -1 \\ f(-1) = -4 \end{cases}; a = -1$ | 3 $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}; & x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}; a = 1$ |
| 2 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+4x-5}{\sqrt{x+8}-3}; & x \neq 1 \\ f(1) = 36 \end{cases}; a = 1$ | 4 $\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{x}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; a = 0$ |

Exercice 3

- 1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{5-x}; & x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}; & x > 4 \end{cases}$

a Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 4.

b Est-ce que g est continue en 4 ?

- 2 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}; & x > 0 \\ h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}; & x < 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de h en 0

- ③ Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^3; & x \leq 0 \\ f(x) = x + a; & x < 0 \end{cases}$$
Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x; & x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}; & x > 1 \end{cases}$$

- ① Étudier la continuité de g sur $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$
- ② Étudier la continuité de g en 1.
- ③ Est-ce que g est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = x\sqrt{1-x}; & x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + x}; & x > 0 \end{cases}$$

- ① Étudier la continuité de g sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
- ② Étudier la continuité de g en 0.
- ③ Est-ce que g est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6

Étudier la continuité de f sur I , puis déterminer $f(I)$ dans chaque cas :

- ① $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad I = [0; 1]$
- ② $f(x) = \frac{x-1}{x+3}, \quad I =] -3; +\infty[$
- ③ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad I =] -\infty; -2]$

Exercice 7

g est la fonction définie sur $[-1; 1]$ par :
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}; & x \in [-1; 0] \\ x^2 + 1; & x \in]0; 1] \end{cases}$$

- ① Étudier la continuité de g sur $[-1; 1]$.
- ② Déterminer $g([-1; 1])$.

Exercice 8

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I dans chaque cas :

- ① $f(x) = 2x^3 - 6x + 3, \quad I = [-2; 2]$
- ② $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 2x, \quad I =]0; 1[$
- ③ $f(x) = x^5 - 3x^2 - 4, \quad I =]-1; 2[$

Exercice 9

Soit f la fonction définie $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} - 1$

- ① Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
- ② Déterminer une valeur approchée de α à 0.01 près.
- ③ Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 10

Soit g la fonction définie $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^5 - 2x^3 + x - 4$

Montrer que la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en au moins un point dans l'intervalle $[-1; 2]$.

Exercice 11

g est la fonction définie $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \frac{1}{x}$

- ① Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- ② Calculer $f^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right)$ sans déterminer $f^{-1}(x)$.

Exercice 12

f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

- ① Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- ② Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .
- ③ Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère.

Exercice 13

h est la fonction définie $] -\infty; 0]$ par $h(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.

- ① Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

- 2 Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de J .
- 3 Donner le tableau de variations de h^{-1} .

Exercice 14

- 1 Simplifier les nombres suivants

a $a = \sqrt[3]{27}$

c $c = \sqrt[5]{243}$

e $e = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}}$

b $b = \sqrt[4]{16}$

d $d = \sqrt{729}$

f $f = \sqrt{\sqrt[3]{64}}$

- 2 Simplifier les nombres suivants :

a $A = \frac{\sqrt{\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2}}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$

b $B = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}}$

c $C = \frac{3^{\frac{2}{4}} \times \sqrt[20]{3 \sqrt[4]{9} \times 3^2}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

- 3 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\sqrt[12]{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[6]{3}$ et $\sqrt[3]{8}$

- 4 Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

b $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

- 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a $x^3 + 27 = 0$

b $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$