

Limites et continuité

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + 3$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - x^2 - 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x - 2}{x^2 + 1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2 - x^3}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 3}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x(x + 3)}{(x - 1)(x + 2)}$	$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 9}$
$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x - 3} + x^2 - 9}{x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x^2 - x}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{x^2 - 16}$
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1 - 3x} - \sqrt{x + 5}}{x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{6 - x} - \sqrt{x + 2}}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2 - x} + 3x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$

Exercice 2

1 / Etudier la continuité de f en x_0 dans les cas suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ f(1) = 4 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} \\ f(2) = 5 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_0 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3} \\ f(2) = \frac{9}{8} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_0 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{x - 4} \\ f(4) = 3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_0 = 4 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{1 + \sin x}} \\ f(0) = -2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

2 / Soit la fonction f définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} \\ f(0) = a \end{array} \right.$$

Déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle f est continue en 0 .

Exercice 3

1 / Etudier la continuité de f en x_0 dans les cas suivantes :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; x > 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 2 \quad ; \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} - 2; x > 0 \\ f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-4}; x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-4x^2+2x+1}{x^2-1}; x < 1 \\ f(x) = \frac{x-4}{3x-1}; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} f(x) = \frac{3}{3-x}; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2}}; x < 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 2$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x^2-x|}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3-7x-6}{|x-3|} \\ f(3) = 20 \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 = 3$$

2 / Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-ax+3}{x^2+bx-b-1}; x < 1 \\ f(x) = \frac{x-2}{x}; x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad f(1) = c$$

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f soit continue en 1

Exercice 4

Etudier la continuité de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{ll} 1. & f(x) = x^3 + 2x - 1 \quad ; \quad I = [0; 1] \\ 2. & f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2} \quad ; \quad I = [3; +\infty[\\ 3. & f(x) = \cos x - 2x + 1 \quad ; \quad I = \mathbb{R} \\ 4. & f(x) = \sqrt{x} + 2 \sin x \quad ; \quad I = [0; +\infty[\\ 5. & f(x) = (x^2 - x)\sqrt{x} \quad ; \quad I = [0; +\infty[\\ 6. & f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x-2}} \quad ; \quad I = [2; +\infty[\end{array}$$

Exercice 5

1 / Montrer que les équations suivantes admet au moins une solution dans l'intervalle I

$$a. \quad x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0 \quad ; \quad I = [0; 1] \quad \quad b. \quad \sqrt{x} - x^3 + 2x = 1 \quad ; \quad I =]0; 1[$$

2 / Montrer que les équations suivantes admet une solution unique dans l'intervalle I

$$\begin{array}{ll} a. & x^4 + 2x - 3 = 0 \quad ; \quad I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right] \\ b. & 2x^3 + 3x + 20 = 0 \quad ; \quad I = [-2; -1] \\ c. & \sqrt{x^3 + 6x + 1} = 2 \quad ; \quad I = [0; 2] \\ d. & 1 + \sin x = x \quad ; \quad I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right] \end{array}$$

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $I = [0; 1]$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 1$

- 1 / Montrer que f est strictement croissante sur I
- 2 / Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur R et que $0 < \alpha < 1$
- 3 / Donner un encadrement à α d'amplitude 0.25
- 4 / Etudier le signe de $f(x)$ sur R
- 5 / Vérifier que : $\alpha = \frac{1 - \alpha^3}{2}$

Exercice 7

1 / Ordonner dans l'ordre croissant les nombres suivants :

a. $a = \sqrt[4]{5}$; $b = \sqrt[3]{4}$; $c = \sqrt[3]{9}$ b. $a = \sqrt[6]{11}$; $b = \sqrt[4]{3}$; $c = \sqrt[3]{7}$
 c. $a = \sqrt{5}$; $b = \sqrt[6]{80}$; $c = 3^{\frac{2}{3}}$ d. $a = (\sqrt[4]{8})^2$; $b = \sqrt{\sqrt{81}}$; $c = \sqrt[3]{\sqrt{2}}$

2 / Simplifier les nombres suivants :

$A = \sqrt[3]{8} - (\sqrt[5]{2})^5 + \sqrt{\sqrt[3]{64}} + \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; $B = \frac{\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[12]{8^8}}{\sqrt[3]{4^3} \times \sqrt{\sqrt[4]{16}} \times \sqrt[6]{2^{15}}}$; $C = \frac{\sqrt[3]{64} \times \sqrt{27} \times \sqrt[5]{7^3} \times 49}{28 \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9}}$

3 / Résoudre dans R les équations suivantes :

$x^5 = 32$; $x^5 = -32$; $x^4 = 2$; $x^4 = -2$
 $\sqrt[3]{x^2 + 7x} = 2$; $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$; $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - 2x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3} - x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$
 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{1 - \sqrt[3]{3-x}}$

Exercice 9

Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer puis calculer $f^{-1}(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$; $I = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ 2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; $I = [0; 1[$
 3. $f(x) = x^2 - 4x + 2$; $I = [2; 4]$ 4. $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$; $I = [1; +\infty[$
 5. $f(x) = \sqrt{x+1} + x$; $I = [1; +\infty[$ 6. $f(x) = x - \sqrt{x}$; $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$
 7. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$; $I = [-1; +\infty[$ 8. $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}}$; $I = [1; +\infty[$

Exercice 10

I. On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$

1/ Etudier les variations de la fonction f

2/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur R et que $1 < \alpha < 2$

3/ Vérifier que : $\alpha = \frac{1}{\alpha^2 - 3}$

II. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$

1/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2/ Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur R^- par : $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}$

1/ Calculer $f'(x)$ pour tout x de R^-

2/ En déduire la monotonie de f sur R^-

3/ Montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left] -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right]$

4/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

5/ Montrer que : $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$ pour tout x de J

6/ Montrer que : $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} < \frac{3}{2}$

Exercice 12

I. On considère la fonction f définie sur par : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1/ Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

2/ Montrer que : $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ pour tout x de D_f

3/ Dresser le tableau de variations de la fonction f

4/ Déterminer : $f\left(]-\infty; -2[\right)$; $f\left([-2; -1[\right)$; $f\left([-1; 0] \right)$ et $f\left([0; +\infty[\right)$

II. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty; -2]$

1/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2/ Montrer que : $g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$ pour tout x de J