

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(\sqrt{x^2 + \pi x} + x)$

Exercice 7 ★★☆☆

- ① Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{3}$$

Calculer $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f(1)$ puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions

- ② Montrer que l'équation $x^3 + \sqrt{x} - 1 = 0$ admet une unique solution α telle que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

Exercice 8 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

- ① Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f
- ② Soit g la fonction définie sur $] -2; -1[$ par $g(x) = f(x)$
 - a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer
 - b Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$

Exercice 9 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x} - 1}$$

- ① Déterminer D_f puis calcules les limites de f aux bornes de D_f
- ② Montrer que $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$ puis dresser le tableau de variations de f

- ③ Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$

- a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- b Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 10 ★★☆☆

Montrer que l'équation (E) : $\frac{1}{x-1} = \sqrt{x}$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$

Exercice 11 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

- ① Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ② Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$
- ③ Calculer $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25
- ④ Montrer que $\sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha + 1}$ puis en déduire que $\alpha < \frac{-1}{4\sqrt{2}}$

Exercice 12 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

- ① Déterminer D_f puis calcules les limites de f aux bornes de D_f
- ② a Montrer que : $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
 - b Dresser le tableau de variations de f (Justifier votre réponse)

③ Déterminer $f(]-\infty; -2[)$, $f([-2; -1[)$, $f(]-1; 0])$ et $f([0; +\infty)$

④ Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; -2]$

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b Montrer que :

$$(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$$

Exercice 13

f est définie sur $I =]-\infty; 3]$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que f est strictement décroissante sur I

② Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1; +\infty[$

③ Montrer que :

$$(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$$

Exercice 14

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$$

① Montrer que : $D_f = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

② Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

③ Montrer que f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

④ a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{1}{4}; 1 \right[$

b Vérifier que $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$

Exercice 15

f est définie sur $I =]-\infty; -1]$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que f est continue sur I .

② Montrer que : $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ en déduire que f est strictement décroissante sur I .

③ a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1; 0[$

b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 16

f est définie sur $I = [4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1$$

① a Vérifier que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$$

b Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

② a Montrer que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) \text{ en déduire que } f \text{ est strictement décroissante sur } I.$$

b Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I puis vérifier que $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$

③ a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-\infty; 1]$

b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

c En déduire que : $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

Exercice 17 ★★☆☆

Soient a , b et c trois nombres réels strictement positifs tels que $a + b \leq c$. Montrer que :

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \Rightarrow (a + b + c)^3 + 27abc = 0$$

Exercice 18 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

- ① Dresser le tableau de variations de f
- ② Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2 < \alpha < 3$

- ③ On pose $\alpha = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$. Montrer que $\alpha = a + \frac{1}{a}$

Exercice 19 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- ① Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[\sqrt[3]{2}; +\infty[$
- ② Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution b dans $]a; +\infty[$
- ③ Montrer que :

$$c \in]0; a[, \sqrt[3]{c + 2} \cdot f(c) = 2c - a$$

Exercice 20 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [-1; 0[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue sur I
- ② Montrer que pour tout $x \in]-1; 0[$,

$$f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}, \text{ en déduire que } f \text{ est strictement décroissante sur } I$$

- ③ Montrer que l'équation $f(x) = x^3$ admet une unique solution α dans I et que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{1}{2}$

- ④
 - a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
 - c Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = f(x)$

Exercice 21 ★★☆☆

- ① Calculer les nombres suivants :

$$\text{a } a = \sqrt[3]{27} \quad \text{c } c = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$$

$$\text{b } b = \sqrt[4]{16} \quad \text{d } d = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{64}}}{\sqrt[5]{32}}$$

- ② Calculer :

$$\text{a } A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$$

$$\text{b } B = \frac{a^{-\frac{4}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{a^{-2}} \times \sqrt[3]{a^{-1}}}$$

- ③ Comparer les nombres a et b tels que :

$$a = \sqrt[4]{3} \text{ et } b = \sqrt[5]{4}$$

- ④ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a } x^3 + 27 = 0$$

$$\text{b } \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$$

$$\text{c } \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x}$$

$$\text{d } \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$$

Exercice 22 ★★☆☆

- 1 Comparer les nombres suivants :

$$(\sqrt[4]{8})^2 \text{ et } \sqrt{\sqrt{81}} \text{ et } \sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

- 2 Montrer que :

$$\sqrt[4]{5} \times \sqrt{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[3]{5} \text{ et } \sqrt[4]{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt{2}$$

et que : $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{\sqrt{b^{-5}}}} \times \sqrt[12]{\frac{a^{-5}}{b^3}} = ab$

- 3 On pose :

$$X = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \text{ et } Y = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$$

Rendre le dénominateur de X et Y un nombre entier

- 4 Simplifier : $A = (27)^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[3]{8-1}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{5}{2}}}$

Exercice 23 ★★☆☆

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ 3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ 4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x - 1}$

5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x - 1}$

6 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}$ 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 4}$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x}$

9 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x}}$

10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x+2}}$

11 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3 + x + 1}}{x}$

12 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x + 1}}{x}$

13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x$

14 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - 2x$

15 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 + 2}$

16 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^6 + 1} - \sqrt{4x^4 + 2}$

17 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt{x + 2}$

Exercice 24 ★★☆☆

Soit f la fonction définie sur $[-4; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- Montrer que f est continue en 0
- Montrer que f est continue sur $[-4; +\infty[$
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- Vérifier que pour tout $x \in [-4; +\infty[$,
 $-x - 8 + 4\sqrt{x+4} = -(\sqrt{x+4} - 2)^2$
- a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-4; +\infty[$
 b Dresser le tableau de variations de f
- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- Dresser le tableau de variations de f^{-1} (justifier votre réponse)
- Calculer $f(5)$ puis déterminer $(f^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right)$
- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 25 ★★☆☆

- 1 Montrer que l'équation $x^2 + x - 1$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$
- 2 Montrer que l'équation $2 \sin(x) = x$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- 3 Montrer que l'équation $x^2 - 5\sqrt{x} + 1 = 0$ admet au moins une solution α telle que $1 < \alpha < 4$
- 4 f est définie par : $f(x) = x^4 + x - 1$
Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses dans l'intervalle $[-1; 1]$
- 5 Soit f la fonction continue sur $[1; 2]$ telle que $f(1) < 1$ et $f(2) > 2$
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$
- 6 Soit f la fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) > ab$ et $f(b) < b^2$
Montrer que l'équation $f(x) = bx$ admet au moins une solution dans $[a; b]$
- 7 Soit f la fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = -4$ et $f(b) < b^2$
Montrer que l'équation $(x - 1)f(x) = 2x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$
- 8 Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25
- 9 Montrer que l'équation $x^3 + x - 11 = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25
- 10 Montrer que l'équation $\sqrt{x} = \frac{1}{x-1}$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$ puis vérifier que $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$

Exercice 26 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie sur $]a; b[$

$((a; b) \in \mathbb{R}^2)$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$$

Montrer que f réalise une bijection de $]a; b[$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Exercice 27 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

- 1 Montrer que f réalise une bijection de $] -1; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer
- 2 Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

Exercice 28 ★★☆☆

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

- 1 Montrer que f réalise une bijection de $] -1; 1[$ sur $\mathbb{R}$
- 2 Déterminer la bijection réciproque f^{-1}

Exercice 29 ★★☆☆

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b)$

Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$ admet au moins une solution dans $[a; b]$

Exercice**30**

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$.
Montrer que :

$$(\exists c \in]0; 1[) , f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$$

Exercice**31**

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et
définie de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$.
Montrer qu'il existe un réel x_0 de $[0; 1]$ tel que
 $f(x_0) = x_0$