

Problème : Soit la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln(x) + e^{1-x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = e \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite de 0.

2) a- Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $\frac{f(x) - e}{x} = \ln(x) - e^{1-x} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$.

b- Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) a- Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire la branche infinie à C_f au voisinage de $+\infty$.

4) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $f'(x) = 1 + \ln(x) - e^{1-x}$.

5) En exploitant le tableau de variations de la fonction dérivée f'

a- Justifier que f admet un minimum absolu en 1.

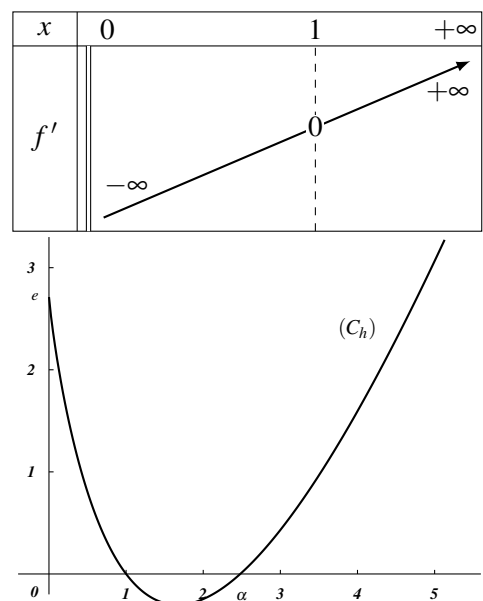
b- Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

c- Justifier que C_f est convexe sur $[0; +\infty[$.

6) On donne ci-contre la courbe de la fonction $h : x \rightarrow f(x) - x$

a- Étudier le signe de la fonction h sur $[0; +\infty[$.

b- Déduire la position relative de C_f et la droite $(\Delta) : y = x$.



7) Construire soigneusement la courbe C_f . (On donne $\alpha = 2,5$)

8) a- En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

b- Calculer l'aire de la partie délimitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$ (unité 1 cm).

9) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b- Justifier que la fonction g^{-1} est dérivable en $e + e^{1-e}$ puis calculer $(g^{-1})'(e + e^{1-e})$.

c- Tracer dans le même repère précédant la courbe $C_{g^{-1}}$ de la fonction g^{-1} (Justifier).

10) On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n < \alpha$.

b- Étudier la monotonie de la suite (u_n) (utiliser le résultat de la question 6).

c- Déduire que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer soigneusement sa limite.