

EXERCICE N°1

I) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une unique solution α .
Vérifier que $1,14 < \alpha < 1,15$.
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

II) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm)

- 1) a/ Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.
b/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a/ Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{e^x}{(xe^x + 1)^2} \cdot g(x)$.
b/ Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a/ Prouver que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.
b/ En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- 4) a/ Donner une équation cartésienne de la demi-tangente T à (C) au point O .
b/ Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $f(x) - x = \frac{(x+1)U(x)}{xe^x + 1}$ où $U(x) = e^x - xe^x - 1$.
c/ Etudier le sens de variation de la fonction U .
d/ En déduire la position relative de (C) et T .
- 5) Traer (C) et T . (On prendra $f(\alpha) \cong 0,46$).
- 6) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$U_n = \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

- 1) Calculer U_1 .
- 2) a/ Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .
b/ En déduire que la suite (U_n) est convergente.
- 3) a/ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b/ En déduire la limite de la suite (U_n) .