

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2(3x - 1)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Unité graphique : 4 cm.

I. Etude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

- 1)
 - a. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$
 - b. Déterminer le sens de variations de g
 - c. Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.
Montrer que α appartient à l'intervalle $]0,2; 0,3[$.
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

II. Etude et représentation graphique de f

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique !
3. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.
5. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
(On montrera que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$)
6. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox)
7. Dresser le tableau de variations de f
8. Construire (C_f)

PARTIE C

Soit $\lambda < 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe (C_f) .

- 1) On pose $F(x) = (ax + b)e^{-2x}$. Déterminer a et b pour que $F'(x) = (3x - 1)e^{-2x}$.
- 2) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2
- 3) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$