

Exercice 1 : Calculer avec les exponentielles

Simplifier l'écriture des réels suivants :

a) $e^{\ln 63}$; b) $e^{-\ln 3}$; c) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$; d) $e^{3 \ln 4}$; e) $e^{\ln 3 - \ln 2}$;
 f) $e^{-\ln(\ln 2)}$; g) $\ln e^{-3}$; h) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$; i) $\ln \sqrt{e^4} - \ln \sqrt{e^2}$; j) $e^{-\frac{1}{3} \ln e^{-3}}$

Exercice 2 : Résolution des équations et inéquation1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$; b) $\frac{1}{2+e^x} = 2e^{-x}$; c) $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$
 d) $e^{2x} + (1+e)e^x + e = 0$; e) $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$;
 f) $e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$
 g) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$; h) $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$; i) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
 j) $2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$; k) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$; l) $e^{-x}(e^{2x} - 4) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$; b) $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$; c) $x^3 = \frac{4}{\sqrt{x}}$
 d) $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} + 2 = 0$; e) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 = 0$; f) $2^{2x+3} - 3 \times 2^{x+1} + 1 = 0$

3) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^{3x-5} \geq 12$; b) $1 \leq e^{-x^2+x}$; c) $e^{1+\ln x} \geq 2$; d) $e^{x^2} e^x > e^6$
 e) $(e^{2x} - 3)(e^x + 2)(1 - 2e^x) \geq 0$; f) $\frac{2e^x - 1}{e^{x-2}} < \frac{e^x}{e^{x+1}}$; g) $3e^{2x} + e^x - 2 < 0$
 h) $e^x(e^x - 2) \geq 2(e^x - 2)$; i) $3e^{2x} + e^x - 4 < 0$; j) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 3 \times 2^x$

Exercice 3 : Systèmes

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} e^{y-x} = e \\ \frac{e^{2x}}{e^x} = \frac{1}{e^3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} e^{2x+1} - e^y = e \\ e^{2x+1} + e^y = 5e \end{cases}$; c) $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 5 \\ x \cdot y = \frac{1}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ e^x + e^{x+y} = e^3 \end{cases}$
 e) $\begin{cases} x - y = 2 \\ \frac{e^x}{e^{2y}} = 1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases}$; g) $\begin{cases} 4^x = 4^y \\ 4^x + 1 = y^{x+4} \end{cases}$

Exercice 4 : Les limites1) Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{5-x}$; b) $f(x) = e^{x^3-2x^2+3x+1}$; c) $f(x) = \frac{e^{7-2x}}{5x}$
 d) $f(x) = \frac{5x+2}{e^{x+1}}$; e) $f(x) = \frac{e^{x^5}-1}{x+1}$; f) $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{x-5}}$; g) $g(x) = (1-x)e^x$
 h) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$; i) $f(x) = xe^{-x}$; j) $f(x) = x^2e^{-x} - x$

2) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition :

a) $f(x) = e^{\frac{1}{2x+5}}$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$; c) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x}$; g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x}$

Exercice 5 : DérivéePréciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa fonction dérivée dans des cas suivants :

a) $f(x) = x^2e^{-x}$; b) $f(x) = e^{2x} \sin x$; c) $f(x) = \frac{2e^x - 3x}{x^2 + e^x}$; d) $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$
 e) $f(x) = xe^{\frac{2x^2+3}{x^2+1}}$; f) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; g) $f(x) = \ln(e^x - 1)$; h) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x$

Exercice 6 : Primitive1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$, de chacune des fonctions suivantes

a) $f(x) = e^{-x+3}$; b) $f(x) = e^{2x}$; c) $f(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$
 d) $f(x) = 3xe^{x^2-1}$; $f(x) = \frac{e^x}{3e^{x+2}}$

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{e^{x+1}}$. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ (Tu écriras $f(x) = 1 - g(x)$, où g est une fonction à déterminer).

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{(e^x+2)^2}$

a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de -2 :

$$\frac{1}{(x+2)^2} = a + \frac{bx}{x+2} + \frac{cx}{(x+2)^2}$$

b) En déduire une autre écriture de $f(x)$.

c) Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f .

4) F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

b) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule en 0.

Exercice 7 : Etude

Problème 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - x - 4$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2) Etudier le comportement de f en $+\infty$ (mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$).

3) a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 4$ est asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$.

4) Construire (C) et (D) .

Problème 2 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1) a) Etudier les variations de g .

b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

2) On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln x$

a) Vérifier que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

b) Etudier les variations de f .

3) Construire dans un repère orthonormé la courbe représentative de f .

Problème 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - 2 - xe^x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) Etudier la fonction f , (la limite en $-\infty$ et en $+\infty$; variations).

2) Déterminer une équation de la droite (Δ) , asymptote à (C) en $-\infty$, puis l'intersection de (C) et (Δ) et enfin les positions relatives de (C) et (Δ) .

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont l'une, notée α , appartient à l'intervalle $[1,5; 1,6]$. Quelle est la valeur de l'autre solution ?

4) Tracer (C) et (Δ) .

Problème 4 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2cm).

On note E le point de coordonnées $(\ln 2; \ln 2)$

1) Soit a et b deux nombres réels, on désigne par g la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

a) Calculer la dérivée de g

b) Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$

a) Prouver que pour tout nombre réel x on a : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

b) En utilisant l'une des formes de $f(x)$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 2$ et (D_2) d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative (C) de f dans le plan P

c) Calculer la dérivée de f , étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f

d) Tracer (C) , sa tangente en E et ses asymptotes

Problème 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire. Interpréter graphiquement.

2) a) Déterminer les limites de f sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier le sens de variation de f définie sur $\mathbb{R}$. En déduire le sens de variation de c Dresser le tableau de variation de sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0 , appartient à $[-1 ; 1]$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = x \left(x^2 - 3e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$

d) Montrer que la courbe, (C_f) admet trois points d'inflexion α , β et γ tels que $\alpha < \beta < \gamma$ dont on déterminera leurs abscisses.

4) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe, (C_f) au point d'abscisse 0.

Construire la courbe et T .

Problème 6 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1-e^x}{e^x - 2}$

1) a) Quel est l'ensemble de définition de ?

b) Montrer que $\forall x \in D_f, \frac{1-e^x}{e^x - 2} = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} - 2}$

c) Etudier les limites de f sur D_f .

d) Résoudre dans $\mathbb{R}, e^{2x} - 3e^x + 4 = 0$.

e) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 2)^2}$. En déduire le sens de variation de f .

f) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à, (C_f) en $-\infty$. Préciser leurs positions relatives.

b) Montrer que la droite (d') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à, (C_f) en $+\infty$. Préciser leurs positions relatives.

c) Tracer les droites (d) et (d') et la courbe (C_f) .

3) Calculer, l'aire A de la partie du plan limitée par l'axe $(O\vec{i})$, les droites d'équations $x = \ln 3$ et $x = \ln 4$ et (C_f) .

Problème 7 :

Unité graphique 2 cm.

1) Soit u la fonction définie par $u(x) = xe^x - 2e^x + 2$

a) Dresser le tableau de variations de u .

b) Déterminer le signe de $u\left(\frac{3}{2}\right)$. En déduire qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $a \in [1,5 ; 1,6]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

c) Calculer $u(0)$. Déduire le signe de u sur IR .

2. On considère la fonction h définie par : $h(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$.

a) Calculer les limites de h sur D_h .

b) Montrer que $h(\alpha) = -\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ et en déduire le signe de $h(\alpha)$.

c) Montrer que $\forall x \neq 0, h'(x) = \frac{u(x)}{x^3}$. En déduire le sens de variations de h et dresser son tableau de variations.

d) Tracer la courbe (C_h) .

Problème 8 :

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^x + x + 1$

a) Etudier le sens de variation de la fonction g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution notée α appartient à l'intervalle $[-1,28; -1,27]$

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur IR .

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : 4cm)

a) Montrer que $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f .

b) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

c) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de (T) et étudier la position de (C) par rapport à (T) .

d) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D) .

e) Faire le tableau de variation de f .

f) Tracer sur un même graphique (C) (T) et (D) .

Problème 9 :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Déterminer le signe de (x) suivant les valeurs du réel x .

Partie B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f .

3) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

4) Etablir le tableau de variation de f .

5) Tracer la courbe (C) , représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie C : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif

Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$ (on justifiera la réponse).

2) a) Calculer $\int_m^0 x e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $\int_m^0 f(x) dx$.

3) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x) dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 10 : (Bac 2019 Sénégal)

Soit f la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}}$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan. On choisit 2 cm pour unité graphique.

Partie A :

Soit g la fonction numérique définie pour tout x réel par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$

1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudier le sens de variations de g puis dresser le tableau de variations de g .

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule puis prouver

que : $0,70 < \alpha < 0,71$. Etudier le signe de g .

Partie B :

1) a) exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$.

b) En déduire le sens de variations de f .

c) Démontrer que $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$, où α est le nombre défini en 3) Partie A.

2) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

3) a) Déterminer la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4) Démontrer que Cf admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote (D) dont on donnera une équation.

5) Dresser le tableau de variation de f .

6) Tracer sur le même graphique Cf et (D) .

7) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x

l'intégrale : $I(x) = \int_0^x (2t - 4)e^{\frac{t}{2}} dt$

7) Soit λ un réel négatif. Calculer en cm^2 l'aire A du domaine constitué des points de coordonnées (x, y) satisfaisant à : $\lambda \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 2 - x$.

Interpréter graphiquement la limite de l'aire A quand λ tend vers $-\infty$.

Problème 11 : (Bac 2018 Togo)

PARTIE A :

On considère une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 1)e^{x-1}$

1) a) Justifier que la limite de g en $-\infty$ est -1 .

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = xe^{x-1}$.

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $\left] \frac{3}{2} ; 2 \right[$.

b) Vérifier que $\alpha \in]1,56 ; 1,57[$.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 2)e^{x-1} - x + 1$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) , unité graphique : 2cm.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) a) Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

- 3) a) Démontrer que la droite d'équation (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
- b) Etudier les positions relatives de (C) et (D) .
- 4) Démontrer que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 5) Déterminer une équation à la tangente (T) à (C) au point d'abscisses -1 .
- 6) Démontrer que $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha - 1}$.
- 7) Montrer que $f(\alpha)$ est négative.
- 8) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions strictement positives.
- 9) Tracer (D) , (T) et (C) .
- 10) Soit λ un élément de $] -\infty ; 2[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 2$.

- a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $A(\lambda)$.
- b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

PARTIE C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty ; \alpha [$.

1. Démontrer que h est une bijection réciproque sur un intervalle J à préciser.
2. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .
- a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de h^{-1} , puis dresser son tableau de variation.
- b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère que (C) .

Problème 12 : (Bac 2016 Côte d'Ivoire)**Partie A :**

Soit g la fonction dérivable et définie sur par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

- 1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2 a) Soit g' la fonction dérivée de g .
Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$.
- b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .
- c) Justifier que : $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$
- d) Dresser le tableau de variations de g .
- 3) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α .
- b) Vérifier que : $0,86 < \alpha < 0,87$.
- c) Justifier que : $\forall x \in] -\infty ; \alpha [, g(x) > 0$ et $\forall x \in] \alpha ; +\infty [, g(x) < 0$.

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , (unité graphique : 2 cm).

On considère la fonction f dérivable et définie sur par :

$$f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

On note (C) la courbe représentative de f .

- 1) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b) En déduire que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.
- 2) a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
- c) Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 3 a) Soit f' la fonction dérivée de f .

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f .

c) Dresser le tableau de variations de f . On ne calculera pas $f(\alpha)$.

4) Construire (D) et (C) sur le même graphique. On précisera les points de (C)

d'abscisses : $0 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 4$

On prendra : $\alpha = 0,865$ et $f(\alpha) = 0,4$.

5) Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $A(t)$ l'aire en cm^2

de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites

d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^t \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3} dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}$.

b) En déduire $A(t)$

c) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(t)$.

PROBLÈME 13 :

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; unité graphique : 4 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Étudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de g en

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0 ; +\infty[$.

On note α cette solution.

b) Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B - Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1. a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2. a) Montrer que, pour tout réel positif x , $f(x) = \frac{1 - e^x}{x + e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) a) Établir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A.2), donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5) a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

En déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) .

6. Tracer (C) et (T) .

PROBLÈME 14 :

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

1) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) .

2) Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u}$.)

Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3) Démontrer que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

4) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f .

Partie B

On note g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

1) Montrer que, dans $[0 ; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.

2) Démontrer que l'équation admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.

3) On pose : $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$.

Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$

4) Pour tout $a > 0$, on note (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a .

Montrer que (T_a) a pour équation $y = Ax$. Tracer (T_a) , puis la courbe (C).

5) Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes (T_a) à (C) (en des points d'abscisses non nulles), seule (T_α) passe par l'origine O .

6) On admettra que (T_α) est au-dessus de (C) sur $[0 ; +\infty[$.

a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.

b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné

Problème 15 :

Partie A :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0 ; 30]$ par $f(t) = 2500 \times e^{-0,513t}$

1) Donner le sens de variation de la fonction f sur I .

2) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse, et 1 cm pour 200 unités en ordonnée.

Partie B : Application

En médecine nucléaire, l'iode 123 est utilisé pour effectuer des « scintigraphies » permettant d'observer le fonctionnement de la thyroïde et la présence d'éventuelles anomalies.

Pour cela, on injecte, au temps $t = 0$, un échantillon d'iode 123 dans le corps du patient. On admet que la fonction f , définie et étudiée dans la Partie A, donne une bonne approximation de l'activité du radionucléide iode 123, en fonction du temps t (exprimé en heures) écoulé après l'injection. L'activité de l'iode 123 est exprimée en becquerels (Bq).

1) Donner la valeur de l'activité initiale de l'iode 123 pour l'échantillon injecté au patient.

2) Calculer l'activité de l'iode 123 au bout de 18 heures après l'injection. On donnera le résultat à 1 Bq près.

3) La demi-vie, notée T , d'un radionucléide est le temps nécessaire au bout duquel son activité a diminué de moitié.

a) En utilisant le graphique de la Partie A, donner une valeur approchée, à 0,1 heure près, de la période T de l'iode 123. On laissera apparents les traits de construction utiles

b) Déterminer la période T de l'iode 123 par le calcul. On donnera le résultat en heures et minutes.