

TD Fonctions Exponentielle. TSEXP

Propriétés de la fonction exponentielle

- 1** 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifie les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + e^{\frac{1}{3}\ln 8} - e^{-\ln \frac{1}{4}}; \quad B = e^{2\ln 5} - e^{-\ln 3} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}})$$

$$C = -2\ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + 3e^{\ln(-\ln \frac{1}{e})}; \quad D = e^{\ln \sqrt{e \sqrt{e}}}$$

- 2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 3$; b) $e^{-x} = 2$; c) $e^{2x} = \frac{1}{2}$; d) $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; e) $e^{2-3x} = e^{-x^2}$
 f) $3^x = 4$; g) $4^{-x} = 3$; h) $7^{5x} = -3$; i) $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2}$; j) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$; k) $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$
 l) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

- 3) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a) $e^{-2x} \geq 4$; b) $e^{-x} \leq 6$; c) $e^{2x} > \frac{1}{2}$; d) $e^{3x+1} < e^{-x+3}$; e) $e^{2-3x} \geq e^{-x^2}$; f) $3^x < 4$; l) $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$

- 2** Soit la fonction polynôme p définie par : $p(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

- 1) Calcule $p(2)$ puis factorise $p(x)$.
 2) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $p(x) = 0$
 3) En déduis la résolution de :
 a- L'équation : $2\ln^3 x + \ln^2 x - 13\ln x + 6 = 0$
 b- L'équation : $e^x + 1 - 13e^{-x} + 6e^{-2x} = 0$.
 c- L'équation : $2^{3x+1} + 2^{2x} - 13 \times 2^x + 6 = 0$
 d- L'équation : $2(\log_3 x)^3 + (\log_3 x)^2 - 13\log_3 x + 6 = 0$

- 3** En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :
- a- $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$; b- $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$; c- $\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$
 d- $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases}$; e- $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$

Application des limites de la fonction exponentielle

- 4** Calcule la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = e^{-x^2+2x-3}$; 2) $f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$; 3) $f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$
 4) $f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+\frac{2}{x}}$; 5) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1+e^{2x-3}}$; 6) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x}-5e^x+6}$
 7) $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$; 8) $f(x) = \ln(e^x - 1)$; 9) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5 1) Calcule la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2 - x - 1}$; b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 3}}$; c) $f(x) = e^{\frac{3}{x-1}}$

d) $f(x) = \frac{-1}{e^{x^2+2x}}$; e) $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}}$; f) $f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x-5}e^{x+6}}$

g) $f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)]$; h) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

2) Calcule la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = e^{2x-3}$; b- $f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}}$; c- $f(x) = (-x+1)e^{x^2-2x+5}$

d- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; e- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+3}}e^{\sqrt{2x+3}}$; f- $f(x) = \frac{5}{e^{2x-3}}$; g- $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

h- $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; i) $f(x) = 2^x$

6 1) Détermine les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

a) $f(x) = (2x+1)e^x$ et $F(x) = (ax+b)e^x$

b) $f(x) = (x+1)e^{\frac{-x}{2}}$ et $F(x) = (ax+b)e^{\frac{-x}{2}}$

2) Détermine les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f

a) $f(x) = (x^2-1)e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

b) $f(x) = (x^2-3x+1)e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-3x}$

Fonction exponentielle dans les cas pratiques

7 A l'instant $t = 0$ (où t est positif et exprimer en seconde), on injecte une substance dans le sang d'un animal dont la concentration f est modélisée par $f(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$.

On rappelle que la « **Concentration** » est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient. Soit (Cf) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unités graphique : 4 cm sur ox et 2 cm sur oy)

1) a- Démontre que $\forall t \in [0; +\infty[$, on a $f(t) = \frac{8(e^t-1)}{e^{2t}}$.

b- Dresse le tableau de variation de f puis trace (Cf) sur $[0; +\infty[$.

2) a- Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centime de secondes.

b- Détermine les instants t_1 et t_2 pour lesquels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

8 On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans un laboratoire de recherche.

Le nombre de bactéries exprimé en centaines est modélisé par la fonction f définie sur

l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t-1}{e^t+2}$ où t représente le temps écoulé en heures.

1) a) Calcule $f(0)$ puis interprète ce résultat.

b) Montre que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t+2}$. En déduis la limite de f en $+\infty$

On appelle cette valeur, la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?

c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifie la réponse.

2) Montre que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$.

En déduis le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Détermine une équation de (T).

4) Recopie et complète le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

5) Trace (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

6) Calcule l'instant t où le nombre de bactéries sera égal à 200

7) Détermine le temps au bout duquel la population de cette colonie serait égale à 80% de sa saturation

9 A l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'une personne ayant contracté le CORONAVIRUS « COVID 19 », une certaine dose en ml de chloroquine. Ainsi on veut étudier le processus d'élimination du virus dans le sang au cours des douze jours suivant l'injection. La quantité de chloroquine présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est modélisée par la fonction f telle que $f(t) = 3e^{-0.1t}$ où $t \in [0; 12]$

1) Dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; 12]$.

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$ puis donne une interprétation concrète de ces valeurs.

4) Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

5) Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à **1,25ml**, ainsi on procède à une seconde injection

Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?

6) On rappelle que le seuil de toxicité de la chloroquine est de **4,5 ml**.

Le patient court-il un risque d'intoxication par la chloroquine à la seconde injection ?

Problèmes

10 Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$ et soit Cf sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) Montre que la droite (D_1) d'équation $y = x$ est asymptote à Cf en $-\infty$.

3) a- Montre que $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$

b- En déduis que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à Cf en $+\infty$.

3) Trace (D_1) ; (D_2) et Cf dans le même repère.

4) Hachure puis calcule l'aire en cm^2 du domaine plan limité par Cf ; (D_1) et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

11 **Partie A** : Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$
Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a- Dresse le tableau de variation de la fonction f'

- b- Calcule $f'(1)$ puis en déduis le signe de $f'(x)$
 2) En déduis le tableau de variation de la fonction f .
 3) Démontre que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (Cf) en $-\infty$ et précise la position de la courbe (Cf) par rapport à la droite Δ .
 4) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in I = [1,9; 2]$
 5) Trace (Cf) et Δ dans le même repère (unité graphique 2 cm).

Partie B : Soit la fonction numérique g définie sur I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ où I est l'intervalle désigné dans la partie A

1) Démontre que $\forall x \in I$, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2) a- Donne les variations de g sur I .

b- En déduis que $\forall x \in I, g(x) < x$,

3) Démontre que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a- Démontre que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

b- En déduis, en raisonnant par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$.

c) Etudie la convergence de la suite u .

Partie C : Soit l'intégrale J définie par $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$

1) Calcule J en utilisant une intégration par parties,

2) Vérifie que l'aire A du domaine plan limité (Cf) , (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ est donnée par $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

12

Partie A : Soient (E_1) et (E_2) les équations différentielles données respectivement par :
 $(E_1) : y' - 2y = x e^x$ et $(E_2) : y' - 2y = 0$

1) Résous (E_2) .

2) Soient a et b deux réels et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a- Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .

b- Montre qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) .

c- En déduis l'ensemble des solutions de (E_1) .

3) Détermine la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0.

Partie B : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Dresse le tableau de variation de g .

2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles dont l'une est 0 et l'autre α telle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

3) En déduis le signe de $g(x)$.

Partie C : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Dresse le tableau de variation f .

2) a- Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$.

b- En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

3) Trace (Cf)

Partie D : Soit l'intégrale I définie par $I = \int_m^0 x e^x dx$ où m est un réel strictement négatif.

1) a- A l'aide d'une intégration par parties, calcule I

- b- En déduis en fonction de m la valeur de l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$
- 2) Calcule la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

13 **Partie A** : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

- 1) Dresse le tableau de variation de g .
2) Donne le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$.

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$
(Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- 1) Dresse le tableau de variation de f .

NB : Pour le calcul des limites, on posera $X = 2e^x$ en $-\infty$ et $X = 1 + 2e^x + \infty$

- 2) Trace (Cf)

- 3) Soit α un réel strictement positif.

a- Montre que $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ puis calcule l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$

b- En déduis, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$ puis donne une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

Partie C : Soit l'équation différentielle (E) définie par (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

- 1) Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).
2) Montre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
3) Résous (E') et en déduis les solutions de (E).

14 **Partie A** : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$

- 1) Dresse le tableau de variation de g .
2) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1,30 ; 1,31[$

Partie B : Soit la fonction numérique f définie sur $] -\infty ; 5[$ par $f(x) = \ln(5-x)$.

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Dresse le tableau de variation de f sur $] -\infty ; 5[$

- 2) Prouve que $f(\alpha) = \alpha$

- 3) a- Démontre que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b- En déduis que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

c- Démontre que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

- 4) a-Trace (Cf)

b- Hachure puis calcule l'aire du domaine plan donné par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ (UA : 3cm)

c- En remarquant que, $\forall x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; montre que $\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

d- En déduis en utilisant une intégration par parties que $A = \int_\alpha^4 f(x)dx = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.

15 **Partie A** : Soit la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Dresse le tableau de variation de f sur $] -1 ; +\infty[$

- 2) Trace (Cf) et la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

- 3) Montre que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée $\alpha \in [1 ; 10]$.

Partie B : Soit la fonction g définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

- 1) Dresse le tableau de variation de g sur $]-1 ; +\infty[$.
- 2) a- Montre que, pour tout x appartenant à $[1 ; 2]$, on a : $1 \leq g(x) \leq 2,5$.
b- En déduis un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$
- 3) Soit A_2 l'aire du domaine délimité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
a- A l'aide d'une intégration par parties, exprime A_2 en fonction de A_1 .
b- En déduis un encadrement de A_2 .

Partie C : Soit h la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

- 1) a- Vérifie que, pour tout x appartenant à $]-1 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.
b- Calcule $h'(x)$.
c- En utilisant la question a), calcule $f''(x)$ puis déduis le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$
- 2) En déduis que, pour tout x appartenant $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ à, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
- 3) Soit u_n la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} : u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$
On admet que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
 - a) Montre que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$
 - b) Montre par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
 - c) En déduis une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

16

Partie A : Soit la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$

Soit (C_1) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Dresse le tableau de variation de f_1 .
- 2) a- Etudie la position de (C_1) et de la droite Δ d'équation $y = x$
b- Trace (C_1) et Δ dans le même repère.

Partie B : Soit la fonction f_3 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$

Soit (C_3) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Dresse le tableau de variation de f_3 .
- 2) Détermine la position relative de (C_1) et (C_3)
- 3) Trace (C_1) et (C_3) dans le même repère.
- 4) On considère la droite D d'équation $y = 1$.

Soit A_1 l'aire du domaine limité par la courbe (C_1) , les axes (ox) ; (oy) et la droite D .

Soit A_3 l'aire du domaine limité par la courbe (C_3) , les axes (ox) ; (oy) et la droite D .

- a- Calcule A_1 .
- b- A l'aide d'une intégration par parties, montre que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

Partie C : Soit la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Soit (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Montre que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.

2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montre que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 .

Place S_1 ; S_2 et S_3 sur la même figure.

3) Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2} - 1 + \ln(\frac{x}{2})}$

a- Dresse le tableau de variation de g sur $[0 ; +\infty[$

b- Montre que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduis que tout point S_n , on a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

17 Partie A : Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}_+$.

Soit (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Dresse le tableau de variation de f_n (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)

2) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point A dont déterminera les coordonnées.

3) Trace (C_1) et (C_2) dans le même repère.

Partie B : Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontre que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

2) a- Démontre que $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$

b- en déduis une relation entre I_n et I_{n+1}

Partie C : Dans cette partie, $n = 2$.

1) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{1}{2} ; 1]$

2) Donne le sens de variation de f'_2 sur $[\frac{1}{2} ; 1]$ puis en déduis que $\forall x \in [\frac{1}{2} ; 1]$; on a :

$$0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25$$

3) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a- Démontre, en utilisant la question C.2., que $\forall n \in \mathbb{N}$, : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

b- En déduis que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que u_n converge vers α .

18 Partie A : Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Dresse le tableau de variation de g

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) Montre que $\forall x \in [0 ; +\infty[$; $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

3) Montre que $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\alpha + 1}$

4) Détermine l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.

5) a- Montre que $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$.

b- Dresse le tableau de variation de $h(x) = e^x - xe^x - 1$ puis détermine son signe.

c- En déduis la position de (C_f) et (T)

d- Trace (C_f) et (T) dans le même repère.

6) Calcule puis hachure l'aire A en cm^2 du domaine plan limité par (C_f) ; (T) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (UG : 4 cm).

19

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
- 2) a- Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$
 b- En déduis que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$
 c- Montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 3) a- Montre que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
 b- En déduis les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 c- Interprète géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
- 4) a- Montre que, sur l'intervalle $[0; \pi]$; l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
 b- Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
- 5) Représente la courbe (C_f) sur $[0; 4]$

Partie B : On veut calculer l'aire, A , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

- 1) Montre que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$
- 2) On pose : $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt$
 a- A l'aide de deux intégrations par parties, montre que :
 $I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + I$.
 b- En déduis la valeur de I .
- 3) Détermine la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donne une valeur approchée de A à 10^{-3} près par défaut.

Partie C : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

- 1) a) Montre que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
 b) Calcule la primitive H de la fonction h , qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.
- 2) a) Détermine $\ln(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
 b) Etudie le sens de variation de la fonction H .
 c) Détermine le tableau de variations de H .
- 3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
 $x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ). On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.
 a) Etudie la position relative de Γ et de Δ .
 b) Détermine les abscisses des points communs à Γ et Δ .
- 4) a) Etablis une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
 b) Etudie la position relative de Γ et T .
- 5) Montre que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Soit g la fonction numérique définie sur $]-\pi; 0[$ par $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$.

- 1) a) Montre que g est dérivable sur $]-\pi; 0[$ et que $g'(x) = -(1 + 2\cos x)\sin x$.
 b) En déduis que $\forall x \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$; $g'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [-\frac{2\pi}{3}; 0[$; $g'(x) \geq 0$

- c) Dresse le tableau de variation de g .
- 2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]-\pi; 0[$ et que $\beta \in]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}[$.
- b) En déduis le signe de g sur $]-\pi; 0[$

Partie B : Soit f la fonction numérique définie sur $]-\pi; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sin(2x)}{1+\cos x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\pi; 0[\\ \text{et} \\ f(x) = 2 - \frac{3}{e^{3x}+1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Etudie la continuité de f en 0.
- 2) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- 3) a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b- Montre que $\forall x \in]-\pi; 0[$, on a : $f(x) = \frac{4(1-\cos x)\sin x \cos x}{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2}$ puis en déduis que $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$

c- En déduis les asymptotes de la courbe (C_f) .

- 4) a- Calcule $f'(x) \forall x \in]0; +\infty[$ puis en déduis le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

b- Montre que $\forall x \in]-\pi; 0[$, on a : $f'(x) = \frac{4g(x)}{1+\cos x}$ puis en déduis le sens de variation de f sur $]-\pi; 0[$.

c- Dresse le tableau de variation de f sur $]-\pi; +\infty[$.

- 5) Construis la courbe (C_f) , ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Partie C : Soit h la fonction numérique définie sur $[1,5; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

On admet que tout $x \in [1,5; 2]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ (**R**).

- 1) Donne le sens de variation de h puis en déduis que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1,5; 2]$.
- 2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a- Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,5; 2]$. (On utilisera la relation (**R**))
- b- Montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- c- En déduis par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- d- En déduis que la suite (u_n) est convergente.
- e- Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donne à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.