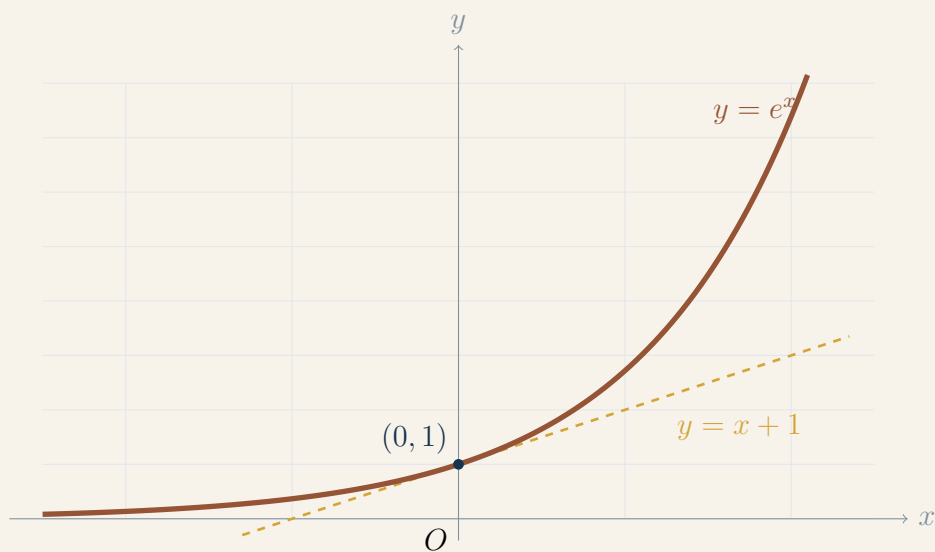


FONCTIONS EXPONENTIELLES

2^e Bac Sciences Physiques

Comprendre la croissance et ses modèles.

DU COURS AU RAISONNEMENT



$$e^{a+b} = e^a e^b$$

6

ÉPREUVES

24

EXERCICES

30

PAGES

QCM · Questions à rédiger · Barèmes sur 20 · Corrigés courts

MODE D'EMPLOI

Six épreuves pour progresser

Un format régulier

Chaque épreuve comporte un QCM de 4 points et trois exercices de 5, 5 et 6 points. Total : 20 points. Les sujets occupent deux pages ; les corrigés suivent sur deux pages.

Comment travailler

1. Respecter la durée indicative et masquer les pages de correction.
2. Pour le QCM, choisir une seule réponse. Pour les autres exercices, rédiger les étapes essentielles.
3. Comparer sa méthode au corrigé, puis refaire les questions manquées sans aide.

Sommaire et progression

N°	Épreuve	Durée	Sujet	Corrigé
01	Les premiers réflexes	60 min	5	7
02	Équations et domaines	70 min	9	11
03	Limites et comparaison	75 min	13	15
04	Dérivées, variations et tangentes	75 min	17	19
05	Primitives, paramètres et modèle	80 min	21	23
06	Bilan de chapitre	90 min	25	27

Fiches méthode : pages 3 et 4. Grille des QCM : page 29. Bilan personnel : page 30.

Barème et conventions

QCM : 1 point par bonne réponse ; 0 sinon, sans pénalité. Dans les exercices rédigés, les points indiqués sont répartis entre la méthode et le résultat. La démarche doit rester lisible.

Les sujets sont originaux, conçus pour l'entraînement ; ce ne sont pas des sujets officiels. Les angles sont en radians et les repères géométriques sont orthonormés, sauf indication contraire.

FICHE MÉTHODE 1 / 2

Calcul, équations et limites

1 · Règles de calcul

$e^0 = 1$, $e^x > 0$, $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = e^a / e^b$ et $(e^a)^n = e^{na}$. Attention : e^{a+b} n'est pas $e^a + e^b$.

2 · Lien avec le logarithme

$\ln(e^x) = x$ pour tout réel x . Pour $a > 0$, $e^{\ln a} = a$ et $e^x = a \iff x = \ln a$. Pour $a \leq 0$, cette équation n'a pas de solution réelle.

3 · Équations et inéquations

$e^u = e^v \iff u = v$ et $e^u < e^v \iff u < v$. Pour une équation en e^{2x} et e^x , poser $t = e^x$ et conserver seulement $t > 0$.

4 · Limites de base

$e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$.

5 · Croissances comparées

Pour tout entier $n \geq 1$, $x^n/e^x \rightarrow 0$ en $+\infty$ et $x^n e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$. Transformer l'expression avant de conclure.

Un exemple à retenir

$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ devient $(t - 1)(t - 2) = 0$ avec $t = e^x > 0$. Les solutions sont 0 et $\ln 2$.

FICHE MÉTHODE 2 / 2

Dériver, étudier et modéliser

1 • Dérivation

$(e^x)' = e^x$; si u est dérivable, $(e^u)' = u'e^u$. Pour $a > 0$, $(a^x)' = (\ln a)a^x$.

2 • Variations

Dans une dérivée $P(x)e^{u(x)}$, l'exponentielle est toujours positive. Il suffit donc d'étudier le signe de $P(x)$.

3 • Tangente et asymptote

En $x = a$, la tangente est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Pour prouver que $y = mx + p$ est asymptote, calculer la limite de $f(x) - (mx + p)$.

4 • Primitives

Pour $a \neq 0$, une primitive de e^{ax+b} est e^{ax+b}/a . Plus généralement, une primitive de $u'e^u$ est e^u . Vérifier en dérivant.

5 • Modèle exponentiel

Si $N(t) = N_0 e^{kt}$ avec $N_0 > 0$, alors $N(0) = N_0$. Pour atteindre qN_0 , résoudre $kt = \ln q$, avec $q > 0$, puis vérifier que le temps obtenu appartient au domaine.

Un exemple à retenir

Pour $f(x) = (x + 2)e^x$, $f'(x) = (x + 3)e^x$. Le minimum est atteint en -3 et vaut $-e^{-3}$.

ÉPREUVE 01 · FONDAMENTAUX

Les premiers réflexes

Durée indicative : 60 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 e^0 vaut :**A.** e **B.** 1**C.** -1 **D.** 0**Q2** $e^{\ln 5}$ vaut :**A.** e^5 **B.** $1/5$ **C.** 5**D.** $\ln 5$ **Q3** Pour $a, b \in \mathbb{R}$, e^a/e^b vaut :**A.** e^{a-b} **B.** e^{a+b} **C.** $e^{a/b}$ **D.** $e^a - e^b$ **Q4** Pour tout réel x , on a :**A.** $e^x > 0$ **B.** $e^x = x$ **C.** $e^x < 1$ **D.** $e^x \geq 1$

Exercice 2 · Calculer et résoudre

5 points

Les expressions sont définies pour tout réel x .1. Simplifier $A = e^{2x}e^{1-x}$ et $B = (e^x - 1)(e^x + 1)$.

(2 points)

2. Résoudre $e^{2x-1} = e^3$.

(1 point)

3. Résoudre $e^{1-x} > e^{2x+4}$.

(2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 01 · FONDAMENTAUX · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Un minimum**5 points**

On considère $f(x) = e^{2x} - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$. (2 points)
2. Résoudre $f'(x) = 0$. (1 point)
3. Donner les variations et la valeur minimale de f . (2 points)

Exercice 4 · Produit d'un facteur affine et d'une exponentielle 6 points

On pose $g(x) = (x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$. (2 points)
2. Étudier les variations de g . (2 points)
3. Trouver le zéro de g et la tangente en $x = 0$. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 01

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

- Q1** Réponse B. Toute puissance d'exposant nul d'un nombre non nul vaut 1.
- Q2** Réponse C. L'exponentielle et le logarithme sont réciproques sur $]0, +\infty[$.
- Q3** Réponse A. La division des puissances de même base soustrait les exposants.
- Q4** Réponse A. L'exponentielle est strictement positive sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 2 · Calculer et résoudre

5 points

1. $A = e^{x+1}$ et $B = e^{2x} - 1$ (un point pour chaque expression). (2 points)
2. La fonction exponentielle est injective : $2x - 1 = 3$, donc $x = 2$. (1 point)
3. La stricte croissance donne $1 - x > 2x + 4$, soit $x < -1$. (2 points)

Toujours positive

$e^{u(x)} > 0$. Pour le signe d'un produit, il suffit d'étudier l'autre facteur.

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 01

Exercices 3 et 4

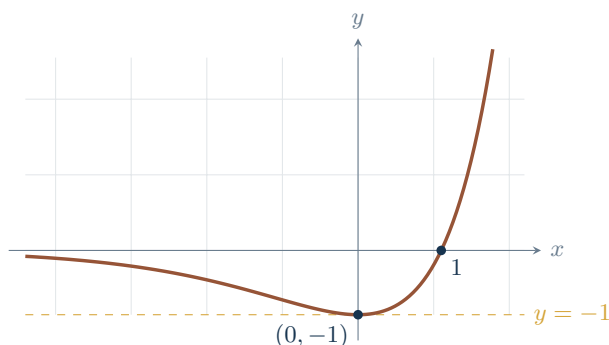
Exercice 3 · Un minimum

5 points

1. $f'(x) = 2e^{2x} - 3$. (2 points)
2. $e^{2x} = 3/2$, d'où $x_0 = \frac{1}{2} \ln(3/2)$. (1 point)
3. f' est négative avant x_0 , positive après. Le minimum est $f(x_0) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln(3/2)$. (2 points)

Exercice 4 · Produit d'un facteur affine et d'une exponentielle 6 points

1. En $-\infty$, $xe^x \rightarrow 0$ et $e^x \rightarrow 0$, donc $g \rightarrow 0$. En $+\infty$, les deux facteurs tendent vers $+\infty$, donc $g \rightarrow +\infty$. (2 points)
2. $g'(x) = xe^x$ a le signe de x . La fonction décroît jusqu'à 0, puis croît ; $g(0) = -1$ est le minimum. (2 points)
3. $e^x > 0$, donc $g(x) = 0 \iff x = 1$. Comme $g(0) = -1$ et $g'(0) = 0$, la tangente est $y = -1$. (2 points)

Exercice 4 : $g(x) = (x - 1)e^x$. Échelles adaptées sur les axes.

Contrôler le domaine

Après le changement $t = e^x$, une racine $t \leq 0$ doit être rejetée.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 02 · ENTRAÎNEMENT

Équations et domaines

Durée indicative : 70 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 $e^x = 1/3$ a pour solution :A. $x = -\ln 3$ B. $x = \ln 3$ C. $x = 1/3$ D. $x = -3$ Q2 $e^{2x} = 4$ a pour solution :A. $x = 2 \ln 4$ B. $x = \ln 2$ C. $x = 2$ D. $x = \ln 4$ Q3 L'ensemble des solutions de $e^x \leq 1$ est :A. $] -\infty, 1]$ B. $[0, +\infty[$ C. $\mathbb{R}$ D. $] -\infty, 0]$ Q4 Pour tout réel x , $\ln(e^x)$ vaut :A. e^x B. x C. $\ln x$ D. $|x|$

Exercice 2 · Le changement d'inconnue

5 points

On considère $e^{2x} - 5e^x + 6$.1. Résoudre $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

(2 points)

2. Résoudre $e^{2x} - 5e^x + 6 \leq 0$.

(2 points)

3. Calculer la somme des deux solutions de l'équation.

(1 point)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 02 · ENTRAÎNEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Un logarithme composé

5 points

On pose $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

1. Déterminer son domaine. (1 point)
2. Calculer la dérivée et préciser les variations. (2 points)
3. Calculer les limites aux deux bornes du domaine. (2 points)

Exercice 4 · Une fonction comprise entre zéro et un

6 points

On considère $g(x) = e^x / (1 + e^x)$.

1. Justifier le domaine et prouver $0 < g(x) < 1$. (2 points)
2. Calculer g' , puis les limites en $-\infty$ et $+\infty$. (2 points)
3. Résoudre $g(x) = 3/4$. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 02

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse A. $x = \ln(1/3) = -\ln 3$.**Q2** Réponse B. $2x = \ln 4 = 2 \ln 2$.**Q3** Réponse D. Comparer à $e^0 = 1$ et utiliser la croissance.**Q4** Réponse B. $e^x > 0$, donc le logarithme est toujours défini et vaut x .

Exercice 2 · Le changement d'inconnue

5 points

1. Poser $t = e^x > 0$. $(t - 2)(t - 3) = 0$ donne $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.

(2 points)

2. Le trinôme est négatif entre ses racines : $2 \leq e^x \leq 3$, donc $x \in [\ln 2, \ln 3]$.

(2 points)

3. $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.

(1 point)

Toujours positive $e^{u(x)} > 0$. Pour le signe d'un produit, il suffit d'étudier l'autre facteur.**Ma reprise**

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 02

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Un logarithme composé

5 points

1. $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$. Le domaine est $]0, +\infty[$. (1 point)
2. $f'(x) = e^x / (e^x - 1) > 0$ sur le domaine : f est strictement croissante. (2 points)
3. En 0^+ , $e^x - 1 \rightarrow 0^+$, donc $f \rightarrow -\infty$. En $+\infty$, $e^x - 1 \rightarrow +\infty$, donc $f \rightarrow +\infty$. (2 points)

Exercice 4 · Une fonction comprise entre zéro et un

6 points

1. $1 + e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. Le numérateur est positif et inférieur au dénominateur : $0 < g < 1$. (2 points)
2. $g' = e^x / (1 + e^x)^2 > 0$. Les limites sont 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ (diviser par e^x). (2 points)
3. $4e^x = 3 + 3e^x$, donc $e^x = 3$ et $x = \ln 3$. (2 points)

Contrôler le domaine

Après le changement $t = e^x$, une racine $t \leq 0$ doit être rejetée.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 03 · ENTRAÎNEMENT

Limites et comparaison

Durée indicative : 75 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x$ vaut :**A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0**D.** 1**Q2** $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$ vaut :**A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 1**D.** 0**Q3** $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$ vaut :**A.** 0**B.** 1**C.** $+\infty$ **D.** e **Q4** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ vaut :**A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 1**D.** 0

Exercice 2 · Trois limites

5 points

Justifier chaque résultat à l'aide d'une limite usuelle.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1)/x$.

(2 points)

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/(e^{3x} - 1)$.

(2 points)

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 3)/(e^{2x} - 1)$.

(1 point)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 03 · ENTRAÎNEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Une inégalité fondamentale

5 points

On considère $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$. (1 point)
2. Dresser le tableau de variations et déterminer le minimum. (2 points)
3. En déduire une comparaison entre e^x et $x + 1$, avec le cas d'égalité. (2 points)

Exercice 4 · Une asymptote oblique

6 points

On pose $h(x) = x + e^{-x}$.

1. Étudier les variations et préciser le minimum. (2 points)
2. Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$. (2 points)
3. Trouver une asymptote en $+\infty$ et situer la courbe par rapport à elle. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 03

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse B. L'exponentielle l'emporte sur x à $+\infty$.

Q2 Réponse D. Poser $t = -x$: $xe^x = -t/e^t \rightarrow 0$.

Q3 Réponse B. C'est le nombre dérivé de l'exponentielle en 0.

Q4 Réponse D. $e^{-x} = 1/e^x$ et $e^x \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 · Trois limites

5 points

1. On écrit $2(e^{2x} - 1)/(2x)$; la limite est 2.

(2 points)

2. Écrire $\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \frac{1}{3}$. La limite est $1/3$.

(2 points)

3. Diviser par e^{2x} : $(1 + 3e^{-2x})/(1 - e^{-2x}) \rightarrow 1$.

(1 point)

Toujours positive

$e^{u(x)} > 0$. Pour le signe d'un produit, il suffit d'étudier l'autre facteur.

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 03

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Une inégalité fondamentale

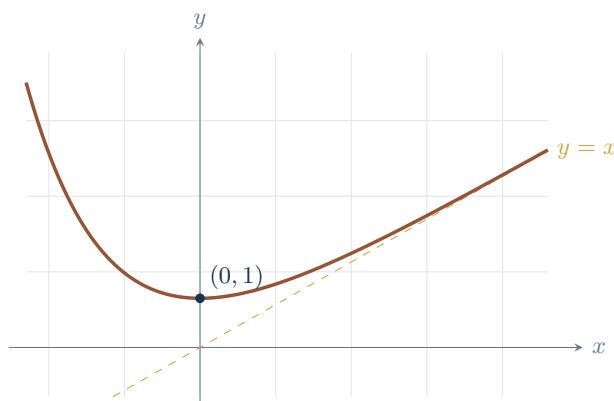
5 points

1. $f'(x) = e^x - 1$. (1 point)
2. $f' < 0$ si $x < 0$, $f' > 0$ si $x > 0$. Le minimum vaut $f(0) = 0$. (2 points)
3. $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x . L'égalité a lieu seulement en $x = 0$. (2 points)

Exercice 4 · Une asymptote oblique

6 points

1. $h' = 1 - e^{-x}$: négative pour $x < 0$, positive pour $x > 0$. Le minimum est $h(0) = 1$. (2 points)
2. En $+\infty$, $h \rightarrow +\infty$. En $-\infty$, poser $t = -x$: $h = e^t - t \rightarrow +\infty$ par croissance comparée. (2 points)
3. $h(x) - x = e^{-x} \rightarrow 0$. L'asymptote est $y = x$; la courbe est strictement au-dessus car $e^{-x} > 0$. (2 points)



Exercice 4 : la courbe de $h(x) = x + e^{-x}$ reste au-dessus de $y = x$. Échelles adaptées.

Contrôler le domaine

Après le changement $t = e^x$, une racine $t \leq 0$ doit être rejetée.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 04 · ENTRAÎNEMENT

Dérivées, variations et tangentes

Durée indicative : 75 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 La dérivée de e^{3x-2} est :**A.** $3e^{3x-2}$ **B.** $3e^{3x}$ **C.** e^{3x-2} **D.** $e^{3x-2}/3$ **Q2** La dérivée de xe^x est :**A.** xe^x **B.** e^x **C.** $(x+1)e^x$ **D.** xe^{x-1} **Q3** La dérivée de e^{-x} est :**A.** $-e^x$ **B.** e^{-x} **C.** $-e^{-x}$ **D.** $-xe^{-x}$ **Q4** La tangente à $y = e^x$ en $x = 0$ est :**A.** $y = x$ **B.** $y = ex$ **C.** $y = 1$ **D.** $y = x + 1$ **Exercice 2 · Dérivée nulle sans extremum**

5 points

On pose $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.1. Montrer que $f'(x) = x^2e^x$.

(2 points)

2. Déterminer les variations sur $\mathbb{R}$.

(1 point)

3. Donner la tangente en 0 et dire si la courbe la traverse.

(2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 04 · ENTRAÎNEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Un maximum sur une demi-droite

5 points

On étudie $g(x) = xe^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

1. Calculer la dérivée et son signe. (2 points)
2. Donner les variations et le maximum. (2 points)
3. Calculer la limite en $+\infty$ et donner l'asymptote correspondante. (1 point)

Exercice 4 · Une tangente au sommet

6 points

On pose $h(x) = (x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de h . (2 points)
2. Donner les intersections de la courbe avec les axes. (2 points)
3. Donner la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à elle. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 04

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse A. Il faut multiplier par la dérivée de $3x - 2$, qui vaut 3.

Q2 Réponse C. Règle du produit : $e^x + xe^x$.

Q3 Réponse C. La dérivée intérieure de $-x$ vaut -1 .

Q4 Réponse D. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 2 · Dérivée nulle sans extremum

5 points

1. $f' = [2x - 2 + x^2 - 2x + 2]e^x = x^2e^x$. (2 points)
2. $f' \geq 0$ et ne s'annule qu'en 0. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (1 point)
3. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$: tangente $y = 2$. La stricte croissance donne $f(x) < 2$ à gauche et $f(x) > 2$ à droite : elle la traverse. (2 points)

Toujours positive

$e^{u(x)} > 0$. Pour le signe d'un produit, il suffit d'étudier l'autre facteur.

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 04

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Un maximum sur une demi-droite

5 points

1. $g' = (1 - x)e^{-x}$, positive pour $0 \leq x < 1$, nulle en 1, négative pour $x > 1$. (2 points)
2. g croît sur $[0, 1]$, puis décroît. Le maximum est $g(1) = 1/e$. (2 points)
3. $g = x/e^x \rightarrow 0$. L'asymptote horizontale est $y = 0$. (1 point)

Exercice 4 · Une tangente au sommet

6 points

1. $h' = -xe^{-x}$: positive avant 0, négative après. Le maximum vaut $h(0) = 1$. (2 points)
2. $h(x) = 0 \iff x = -1$, d'où $(-1, 0)$. Sur l'axe des ordonnées, le point est $(0, 1)$. (2 points)
3. La tangente est $y = 1$. Puisque 1 est le maximum global, la courbe reste en dessous ; elle touche la droite seulement en $x = 0$. (2 points)

Contrôler le domaine

Après le changement $t = e^x$, une racine $t \leq 0$ doit être rejetée.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 05 · APPROFONDISSEMENT

Primitives, paramètres et modèle

Durée indicative : 80 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Une primitive de e^{2x} sur $\mathbb{R}$ est :**A.** e^{2x} **B.** e^{x^2} **C.** $2e^{2x}$ **D.** $e^{2x}/2$ **Q2** La dérivée de 2^x est :**A.** $2^x / \ln 2$ **B.** 2^x **C.** $(\ln 2)2^x$ **D.** $x2^{x-1}$ **Q3** Pour tout réel x , $e^{x \ln 3}$ vaut :**A.** $3x$ **B.** x^3 **C.** $e^x \ln 3$ **D.** 3^x **Q4** $2^x = 8$ a pour solution :**A.** 2**B.** 4**C.** 3**D.** $\ln 8$

Exercice 2 · Retrouver une primitive

5 points

On pose $F(x) = (ax + b)e^x$, où a, b sont réels.1. Exprimer $F'(x)$.

(2 points)

2. Trouver a, b pour que F soit une primitive de $(2x + 3)e^x$.

(2 points)

3. Donner la primitive G vérifiant $G(0) = 0$.

(1 point)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 05 · APPROFONDISSEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Un modèle de croissance

5 points

Un modèle théorique donne $N(t) = 200e^{0,2t}$ pour $t \geq 0$, le temps étant exprimé en heures.

1. Déterminer la valeur initiale. (1 point)
2. Déterminer le temps exact de doublement. (2 points)
3. À partir de quel temps a-t-on $N(t) \geq 1000$? (2 points)

Exercice 4 · Un paramètre dans une étude de fonction

6 points

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = e^x - mx$.

1. Étudier les variations lorsque $m \leq 0$. (2 points)
2. Pour $m > 0$, déterminer le minimum en fonction de m . (2 points)
3. Pour quel $m > 0$ ce minimum vaut-il zéro ? (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 05

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

- Q1** Réponse D. La dérivée de $e^{2x}/2$ est bien e^{2x} .
- Q2** Réponse C. $2^x = e^{x \ln 2}$; la dérivée intérieure vaut $\ln 2$.
- Q3** Réponse D. C'est la définition de la puissance réelle de base 3.
- Q4** Réponse C. $8 = 2^3$ et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante.

Exercice 2 · Retrouver une primitive

5 points

1. $F'(x) = (ax + a + b)e^x$. (2 points)
2. On identifie $a = 2$ et $a + b = 3$, donc $b = 1$. (2 points)
3. $G(x) = (2x + 1)e^x + C$. Comme $G(0) = 1 + C = 0$, $G(x) = (2x + 1)e^x - 1$. (1 point)

Toujours positive $e^{u(x)} > 0$. Pour le signe d'un produit, il suffit d'étudier l'autre facteur.**Ma reprise**

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 05

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Un modèle de croissance

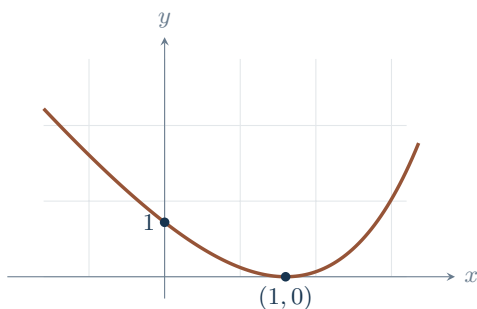
5 points

1. $N(0) = 200$. (1 point)
2. $N(t) = 400 \iff e^{0,2t} = 2 \iff t = 5 \ln 2$ heures. (2 points)
3. $e^{0,2t} \geq 5 \iff t \geq 5 \ln 5$ heures. L'exponentielle est croissante. (2 points)

Exercice 4 · Un paramètre dans une étude de fonction

6 points

1. $f'_m = e^x - m > 0$: la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (2 points)
2. $f'_m = 0 \iff x = \ln m$. La dérivée passe de négative à positive. Le minimum vaut $m - m \ln m$. (2 points)
3. $m(1 - \ln m) = 0$ avec $m > 0$ donne $\ln m = 1$, donc $m = e$. (2 points)



Exercice 4 : pour $m = e$, $f_m(x) = e^x - ex$ a pour minimum 0. Échelles adaptées.

Contrôler le domaine

Après le changement $t = e^x$, une racine $t \leq 0$ doit être rejetée.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 06 · SYNTHÈSE

Bilan de chapitre

Durée indicative : 90 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Pour $a > 0$, $a \neq 1$, la dérivée de a^x est :

- A.** $(\ln a)a^x$ **B.** $a^x / \ln a$
C. a^x **D.** xa^{x-1}

Q2 L'égalité $e^x + e^{-x} = 2$ a pour ensemble de solutions :

- A.** $\mathbb{R}$ **B.** $\{-1, 1\}$
C. $\{0\}$ **D.** $\emptyset$

Q3 La fonction $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est :

- A.** Paire **B.** Impaire
C. Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ **D.** Constante

Q4 Une primitive de $3e^{-2x}$ est :

- A.** $\frac{3}{2}e^{-2x}$ **B.** $-\frac{3}{2}e^{-2x}$
C. $3e^{-2x}$ **D.** $-6e^{-2x}$

Exercice 2 · Compter les solutions

5 points

On étudie $f(x) = (x - 2)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer f' . (1 point)
2. Donner les variations, le minimum et les limites aux infinis. (2 points)
3. Démontrer que $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions. (2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 06 · SYNTHÈSE · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Une différence d'exponentielles

5 points

On pose $g(x) = e^x - e^{-x}$.

1. Montrer que g est impaire. (1 point)
2. Montrer que g est strictement croissante et déterminer son image. (2 points)
3. Résoudre $g(x) = 3$. (2 points)

Exercice 4 · Une suite exponentielle

6 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = e^{-n}$ et $v_n = 1 - u_n$.

1. Calculer u_0 et v_0 . (1 point)
2. Donner la raison de (u_n) et les limites des deux suites. (2 points)
3. Trouver le plus petit entier n tel que $v_n \geq 0,99$. On peut utiliser $4 < \ln 100 < 5$. (2 points)
4. Exprimer $u_0 + u_1 + \dots + u_n$. (1 point)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 06

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse A. $a^x = e^{x \ln a}$.**Q2** Réponse C. Poser $t = e^x > 0 : t + 1/t = 2 \iff (t - 1)^2 = 0$, donc $x = 0$.**Q3** Réponse A. Remplacer x par $-x$ échange les deux termes, sans changer la somme.**Q4** Réponse B. La dérivée de $-\frac{3}{2}e^{-2x}$ vaut $3e^{-2x}$.

Exercice 2 · Compter les solutions

5 points

1. $f'(x) = (x - 1)e^x$. (1 point)
2. f décroît sur $] -\infty, 1]$, puis croît. Le minimum est $-e$. Les limites sont 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. (2 points)
3. La fonction est continue, strictement monotone sur chaque branche. Comme $-e < -1 < 0$, il y a une solution sur $] -\infty, 1[$ et une sur $]1, +\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires. (2 points)

Toujours positive $e^{u(x)} > 0$. Pour le signe d'un produit, il suffit d'étudier l'autre facteur.**Ma reprise**

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 06

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Une différence d'exponentielles

5 points

1. $g(-x) = e^{-x} - e^x = -g(x)$. (1 point)
2. $g' = e^x + e^{-x} > 0$. Les limites sont $-\infty$ et $+\infty$; par continuité, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. (2 points)
3. Poser $t = e^x > 0$: $t^2 - 3t - 1 = 0$. Seule la racine $(3 + \sqrt{13})/2$ est positive. Ainsi $x = \ln((3 + \sqrt{13})/2)$. (2 points)

Exercice 4 · Une suite exponentielle

6 points

1. $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. (1 point)
2. $u_{n+1} = e^{-1}u_n$ avec $0 < e^{-1} < 1$. Ainsi $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 1$. (2 points)
3. $e^{-n} \leq 0,01 \iff n \geq \ln 100$. Le plus petit entier est 5. (2 points)
4. C'est une somme géométrique : $(1 - e^{-(n+1)})/(1 - e^{-1})$. (1 point)

Contrôler le domaine

Après le changement $t = e^x$, une racine $t \leq 0$ doit être rejetée.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

CORRECTION RAPIDE

Grille des QCM

Chaque ligne correspond à une épreuve. Retrouver les explications dans son corrigé.

Épreuve	Q1	Q2	Q3	Q4
01	B	C	A	A
02	A	B	D	B
03	B	D	B	D
04	A	C	C	D
05	D	C	D	C
06	A	C	A	B

Trois questions à se poser après une erreur

1. Ai-je bien lu les hypothèses, le domaine et les bornes ?
2. Quelle formule ou propriété permet de trancher entre les choix ?
3. Puis-je éliminer une réponse avec un calcul simple ou un cas particulier ?

Ne pas apprendre uniquement la lettre

Une réponse choisie au hasard ne valide pas une méthode. Refaire le calcul sans les propositions, puis retrouver la bonne réponse.

Mes deux pièges personnels

BILAN PERSONNEL

Mes progrès, étape par étape

Noter les résultats et choisir une priorité de révision après chaque épreuve.

Épreuve	Date	Note / 20	Priorité de révision
01			
02			
03			
04			
05			
06			

Un plan de reprise en trois séances

Séance 1. Relire les deux fiches méthode et refaire les calculs de base manqués.

Séance 2. Reprendre deux exercices rédigés, en expliquant chaque étape.

Séance 3. Refaire une épreuve en temps limité et comparer les résultats.

La méthode que je maîtrise maintenant

Mon prochain objectif
