

Exercices d'application

Exercice 1

A. Simplifie les expressions suivantes

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) \quad B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3 \quad C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$$

B. Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln x^3; \quad g(x) = \ln x^4; \quad h(x) = \ln|x|; \quad h(x) = x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|;$$
$$p(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right); \quad h(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{3-x}}$$

C. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \ln(x^2 - 4x + 5) = 0; \quad b) \ln(x + 2) = \ln(3 - x); \quad c) \ln(2x - 3) + 2\ln(x + 1) = \ln(6x - 3)$$
$$e) \ln 2x - \ln 3 = \ln(1 + x^2) - \ln(4 - x^2); \quad f) 2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0;$$

D. Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

$$1) \ln(4 - 2x) \leq 0; \quad 2) \ln(x + 5) + 2\ln(x + 4) \leq \ln(x + 13); \quad 3) \ln^2 x - 2\ln x - 15 < 0$$

E. Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

$$a) \begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} xy = e^2 \\ 3\log_x y + 3\log_y x = -10 \end{cases}$$

Exercice 2

A. Calcule les limites suivantes

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1).$$

B. Dérive les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}; \quad g(x) = \ln(x^3 + 5x^2); \quad h(x) = \ln \left(\frac{x^3}{x^2+1} \right);$$

C. Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ où $f(x) = \frac{(x-3)\ln x}{x}$ et $g(x) = x - 3 + 3\ln x$.

Exercice 3 : Dans les cas suivants détermine les limites aux bornes du domaine de définition puis dérive les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x) = -x + 3 + \ln x; \quad g(x) = 3x^2 + 3 + x \ln x; \quad h(x) = x + 3 - \frac{\ln x}{x-1}; \quad p(x) = 3 - x^2 + \frac{\ln|x|}{x+1}$$

Exercice 4

1) Détermine une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; \quad g(x) = \frac{x}{1-x^2}; \quad h(x) = \frac{1}{2x} + \frac{7}{1+3x};$$

2) Détermine les réels a et b tels que : $\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x}$.

$$\text{Déduis - en le calcul de l'intégrale } I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} dx.$$

3) Calcule les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{2x} dx ; \quad B = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$$

- 4) En utilisant la technique de primitivation par parties détermine la primitive F sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln x$ qui prend la valeur 3 en 1.

Exercice 5 : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 2 cm.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
2. Etudie la parité de f .
3. Démontre que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
4. Calcule $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f .
5. a) Montre que f réalise une bijection sur D_f vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Explicite la réciproque f^{-1} de f .
6. a) Démontre que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
b) Donne l'équation de la tangente (T) à (C) au point I .
c) Etudie la position de (C) par rapport à (T) .
7. Trace (C) et (T) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.
8. a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $I = \int_0^2 f(x) dx$.
b) Interprète l'intégrale I .
c) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
9. Soit $K = \int_{-2}^2 f(x) dx$. Sans calculer K explique pourquoi $K = 0$.

Exercice 6

- A) On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.
- 1) Etudie le sens de variation g puis dresse le tableau de variation.
 - 2) Démontre qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ avec $0,65 < \alpha < 0,66$.
 - 3) Etudie le signe de g sur $]0 ; +\infty[$.
- B) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative.
- 1) Montre que la droite (D) d'équation : $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C) puis étudie la position relative de (C) par rapport à (D) .
 - 2) Démontre que : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.
 - 3) Dresse le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - 4) a) Sachant que $g(\alpha) = 0$, démontre que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.
b) Démontre que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$. Déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$.
 - 5) Trace (D) et (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.
 - 6) a) Détermine une primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$.

- b) Calcule l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{-1}$.
- c) Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$. Détermine l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$.
Calcule la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

ADD