

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSExp

2017 - 2018

Sujet 1 :

Exercice1 :

on donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
2. Trouver les réels a, b et c tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.
3. Trouver la primitive F de f prenant la valeur $\frac{5}{2}$ en 0.
4. En déduire $I = \int_2^3 f(x)dx$.

Exercice2 :

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 1) dx \quad J = \int_0^1 (2x - 5)(x^2 - 5x + 1)dx$$

$$K = \int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} dx$$

- 2) Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \cos t dt \quad A_2 = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$$

- 3) Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$B = \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1+2z}} dz \quad (1 \text{ pt})$$

Problème :

A) idère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ) .

- 3) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ). Donner une équation de cette tangente.
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique $\beta \in [3 ; 4]$. Donner un encadrement de chacune des solutions à 0,1 près.
- 5) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- 6) Déterminer l'aire A de la région du plan limitée par (Cf); la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Sujet 2 :

Exercice1 :

- 1) Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{2x} dx \quad B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$$

- 2) Calculer au moyen d'une intégration par parties le réel $K = \int_1^2 x \ln x dx$.

- 3) On donne les fonctions $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$.

- 4) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x}$.

En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+x} dx$.

- 5) Calculer la valeur moyenne de la fonction h définie par $h(x) = xe^{x^2}$ sur l'intervalle $I = [2 ; 4]$.

Exercice 2 :

I. Simplifie le réel : $M = e^{\ln 4} + e^{-\ln 4} + e^{-2 \ln 4} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$

II. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Vérifie que $P(x) = (x-1)(2x-1)(x+3)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) Déduis en les solutions des équations suivantes :

a) $\ln 2x - \ln 3 = \ln(1+x^2) - \ln(4-x^2)$

b) $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$.

c) $2e^{3x} + 3e^{2x} - 8e^x + 3 = 0$.

III. Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

Problème :

Partie A : On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

- 1) Démontre que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$
- 2) Etudie le sens de variation de g , puis dresse son tableau de variation.
- 3) Calcule $g(0)$. Déduis en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) a) Calcule $\int 2te^{2t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) Déduis en la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

Partie B : On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité 2cm).

- 1) Etudie la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Démontre que la courbe (C) admet pour asymptote en $-\infty$ la droite (D): $y = x + 3$. Etudie suivant les valeurs de x les positions relatives de (D) et (C).
- 3) Dresse le tableau de variation de f .
- 4) Démontre que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectifs α_1 et α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$).
- 5) Montre que $\alpha_1 \in [-3, 1; -3]$ et $\alpha_2 \in [0; 1]$. Détermine et justifie un encadrement d'amplitude 0,1 de α_2 .
- 6) Trace la courbe (C) et la droite (D).
- 7) m est un nombre réel négatif. On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (C), (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = m$.
a) Calcule A_m .
b) Calcule la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$.