

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSExp

2017 - 2018

Fonctions ln et expo :

Exercice1 : Préciser le domaine de validité, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(5 - 2x) = 0$; b) $\ln(x - 2) + \ln(x + 1) = \ln(3x - 5)$; c) $2 \ln(x - 2) + \ln(3x + 1) = 2 \ln 2$;

d) $\ln|6 - x| = 1$; e) $\ln|x + 1| + \ln|x - 5| = \ln 16$; f) $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$;

g) $(\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0$; h) $6 \ln^2 x + 7 \ln x - 3 = 0$; i) $\ln^3 x - 2 \ln^2 x - \ln x + 2 = 0$;

j) $2 \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + \ln\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$;

k) $\log x + \log(3 - x) = \log 5$; l) $\log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} + \log_9(4x + 15) = 0$.

Exercice2 : Préciser le domaine de validité, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{x^2+2} = e^{3x}$; b) $e^{x^2} = 4$; c) $e^{-x-4} - 6 = 0$; d) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; e) $e^x - 10e^{-x} = 3$;

f) $3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}$; g) $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$; h) $3e^{3x} - 4e^{2x} - 13e^x + 14 = 0$;

i) $2e^{2x-4} + 5e^{x-2} - 3 = 0$; j) $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$; k) $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0$;

l) $3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$; m) $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$; n) $\frac{e^{2x} - 6}{2 - 2e^{2x}} = 1$.

Exercice3 : Préciser le domaine de validité, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(5x^2 + 6x + 1) > 0$; b) $\ln(x^2 - 10x + 9) > \ln(3x - 27)$; c) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) \leq 0$;

d) $2(\ln 2x)^2 - 5 \ln 2x - 3 \leq 0$; e) $\ln(x + 5) + \ln(x + 4) \leq \ln(x + 13)$; f) $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{8}{3}$.

g) $e^{x-6} - 1 > 0$; h) $e^{x+2} < 8$; h) $e^{2x} - e^x - 12 > 0$; i) $e^x - 5 - 6e^{-x} \geq 0$.

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes équations suivantes :

a) $\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \ln(x - 2) + 3 \ln(y - 1) = 0 \\ 2 \ln(x - 2) - \ln(y - 1) = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$; g) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 5 \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$; i) $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 5 \\ e^x - e^y = -7 \end{cases}$; j) $\begin{cases} \ln(y + 1) - \ln(x + 4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{cases}$; k) $\begin{cases} 4^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \cdot 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$;

l) $\begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$; m) $\begin{cases} e^x e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} e^y = 2 \end{cases}$; n) $\begin{cases} xy = e^2 \\ 3 \log_x y + 3 \log_y x = -10 \end{cases}$.

Exercice5 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

- 1) Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de degré 1.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- 3) En déduire les solutions des équations suivantes :
 - $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$.
 - $e^{3x} + 2e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

Exercice6 : $\forall x \in \mathbb{R}$; on pose $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$.

- 1) Montrer qu'il existe 3 réels a , b et c tels que : $Q(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 2) En déduire la solution dans $\mathbb{R}$ de : $Q(x) \leq 0$.
- 3) Utiliser les résultats précédents pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) \quad 2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 \leq 0$$

$$(I_2) \quad 2\ln x + \ln(2x - 1) \leq \ln(5x + 2).$$

Exercice7 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 3x - 10 = 0$.
- 2) En déduire la résolution des équations suivantes :

$$a) 9^x - 3^{x+1} - 10 = 0; \quad b) 4^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0; \quad c) (\log x)^2 - 3(\log x) - 10 = 0.$$

Exercice8 :

I. Déterminer D_f de f de chacune des fonctions, puis les limites aux bornes de D_f .

$$a) f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}; \quad b) f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right); \quad c) f(x) = (x - 1)e^{\frac{2}{x-1}}; \quad d) f(x) = \ln(e^{x+1} + 2);$$

II. Calculer les intégrales simples suivantes :

$$I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x - 3)dx; \quad I_2 = \int_0^1 e^{2x-1} dx; \quad I_3 = \int_0^1 xe^{x^2-1} dx; \quad I_4 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$I_5 = \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x}{e^x + 2} dx; \quad I_6 = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx; \quad I_7 = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx; \quad I_8 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx; \quad I_9 = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$$

III. Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e \ln x dx; \quad J = \int_{-1}^0 \ln(x + 2)dx; \quad K = \int_e^{2e} x \ln x^2 dx; \quad L = \int_0^1 (x + 2)e^x dx; \quad M = \int_0^1 xe^{3x-2} dx$$

Exercice9 :

- I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.
- 1) Trouver les réels a et b tels que : $\forall x \neq -1 ; f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.
 - 2) En déduire la valeur de $I = \int_0^3 f(x)dx$.
- II. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$.
- 1) Déterminer le domaine de définition D_g de g .
 - 2) Trouver les réels a et b tels que : $\forall x \in D_g ; g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$.
 - 3) En déduire la valeur de $J = \int_0^2 g(x)dx$.
- III. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.
- 1) Trouver les réels a , b et c tels que : $\forall x > 0 ; h(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
 - 2) Calculer $K_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x)dx$
- IV. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
- 1) Calculer I_0 .
 - 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, en utilisant une intégration par parties, trouver I_{n+1} en fonction de I_n .
 - 3) En déduire I_1, I_2, I_3 puis I_4 .

Problème1 : Extrait du Bac 2013 T. S.Exp

- 1) Soit la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.
 - a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.
 - b) En déduire le signe de $g(x)$.
- 2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2 - x$.
 - a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
 - b) Calculer $f'(x)$.
 - c) Montrez que $f'(x)$ a le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau des variations de f .
 - d) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 ; donnez, en justifiant, un encadrement d'amplitude $0, 1$ de chacune d'elles.
- 3) On note $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $4cm$.
 - a) Montrez que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.
 - b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) .
 - c) Déterminez les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à (D) .
 - d) Tracer $(\mathcal{C})$ et (D) dans le même repère.

Problème 2 :

A) idère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ) .
- 3) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ) . Donner une équation de cette tangente.

- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique $\beta \in [3 ; 4]$. Donner un encadrement de chacune des solutions à 0,1 près.
- 5) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- 6) Déterminer l'aire A de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Problème 3 :

Partie A : On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

- 1) Démontre que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$
- 2) Etudie le sens de variation de g , puis dresse son tableau de variation.
- 3) Calcule $g(0)$. Déduis en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) a) Calcule $\int 2te^{2t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) Déduis en la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

Partie B : On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité 2cm).

- 1) Etudie la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Démontre que la courbe (C) admet pour asymptote en $-\infty$ la droite $(D): y = x + 3$. Etudie suivant les valeurs de x les positions relatives de (D) et (C) .
- 3) Dresse le tableau de variation de f .
- 4) Démontre que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectifs α_1 et α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$).
- 5) Montre que $\alpha_1 \in [-3, 1 ; -3]$ et $\alpha_2 \in [0 ; 1]$. Détermine et justifie un encadrement d'amplitude 0,1 de α_2 .
- 6) Trace la courbe (C) et la droite (D) .
- 7) m est un nombre réel négatif. On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (C) , (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = m$.
a) Calcule A_m .
b) Calcule la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 4 : Extrait du Bac 2012 T. S.Exp

Partie A :

- 1) Résoudre l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.
- 2) Déterminer la solution particulière f dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ passe par le point $K(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Partie B :

- 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$.
a) Etudier les variations de la fonction g .
b) En déduire les signes de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- 2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$. ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm sur (ox) et 1cm sur (oy)).
- Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
 - Montrer que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
 - Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) .
 - Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$ puis dresser le tableau des variations de f .
 - Tracer $(\mathcal{C})$ et (Δ) .
- 3) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$.
- Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - Calculer en cm^2 l'aire $A(D)$ de la partie D du plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 5 : Extrait du Bac 2011 T. S.Exp

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une Petrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

- Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.
- Montrer que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

On appelle cette valeur la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f ?

- L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.
- Montrer que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
 - Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe $(\mathcal{C})$. Déterminer l'équation de (T) .
 - Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

- Tracer $(\mathcal{C})$, (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à $(\mathcal{C})$.
- Calculer à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à **200**.
- Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera **80%** de sa saturation.

Problème 6 : Extrait du Bac 2010 T. S.Exp

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[10; 100]$ par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Démontrer que $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10; e^3]$ et négative sur $[e^3; 100]$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Partie B

On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge. x représenté en années et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres, on admet que sur l'intervalle $[10; 100]$ on a : $g(x) = 110f(x)$. où f est la fonction définie dans la **partie A**.

- 1) Calculer la capacité pulmonaire à **10 ans; 15 ans; 30 ans et 60 ans**.
- 2) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthogonal (en abscisse : **1cm** pour **10 ans** et en ordonnées **3cm** pour **1 litre**).
- 3) À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
- 4) Déterminer graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à **5 litres**.

Problème 7 :

A. Le plan P est muni du repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : **4 cm** sur l'axe des abscisses et **2 cm** sur l'axe des ordonnées. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x}).$$

- 1) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$
- 2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Démontrer que, pour tout x réel : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
- 4) Donner le tableau de variation de f .
- 5) Représenter la fonction f dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

B. On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t , (t positif exprimé en secondes), la concentration y de la substance injectée est : $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On appelle « *concentration* » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité de sang qui le contient.

- 1) En utilisant les résultats de la partie **A.**, donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t en secondes.
- 2) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?
- 3) Calculer au bout de combien de temps la concentration retombe au quart de sa valeur maximale. Vérifier graphiquement en utilisant la question **5)** du **A.**
- 4) Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t , $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3} .

Problème 8 : Extrait du Bac 2006 T. S.Exp

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = e^{x-1} - mx$ où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité **2cm**).

- 1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

- 2) Montrer que la droite Δ_m d'équation : $y = -mx$ est une asymptote à la courbe (C_m) et déterminer la position de cette droite par rapport à (C_m) .
- 3) Etudier la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (C_1) dans le repère.
- 4) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1; +\infty[$. Montrer que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$.

Représenter la courbe (C_1') de $(g_1)^{-1}$.

- 5) Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1) , la droite $\Delta_1: y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$, ($\alpha < 1$).

Problème 10 :

Soient la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique **3 cm**.

- 1) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on dire pour la courbe ?
- 2) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour $x \in [0; +\infty[$.
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution m , montrer que $m \in [1; 2]$ et déterminer un encadrement de m à 10^{-1} près par dichotomie.
- 5) Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure.
- 6) a) Déterminer les réels a et b tels $\forall x \neq -1; \frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.
b) En déduire l'aire cm^2 du domaine limité par (T) ; $(\mathcal{C})$ et la droite $y = 1$.