

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSExp

2017 - 2018

Fonctions ln et expo :

Exercice 1

I. Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Vérifie que $P(x) = (x - 1)(2x - 1)(x + 3)$.

(0, 25 pt)

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

(0, 50 pt)

3) Déduis en les solutions des équations suivantes :

a) $\ln 2x - \ln 3 = \ln(1 + x^2) - \ln(4 - x^2)$

(0, 75 pt)

b) $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$.

(0, 75 pt)

c) $2e^{3x} + 3e^{2x} - 8e^x + 3 = 0$.

(0, 75 pt)

II. Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

$$a) \begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}; \quad (0, 75 \text{ pt})$$

$$b) \begin{cases} \ln(x^3 y^4) = 25 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y^5}\right) = -14 \end{cases}$$

III. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

1) Déterminer les nombres réels a , b et c tel que $\forall x \in]1; +\infty[$

$$\text{On ait } g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2) Déterminer une primitive de la fonction g sur $]1; +\infty[$

3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx$

Problème 1 :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.

c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique (2 cm).

a) Dresser le tableau de variation de f .

- b) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-3} .
- c) Tracer (C) dans le repère.

Problème 2 : -----[11 points]

- A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (x + 3)e^x$
- 1) Dresser le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé) (2 pts)
 - 2) Préciser l'extremum de g sur $\mathbb{R}$. (0, 5 pt)
 - 3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$. (0, 5 pt)
- B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x + 2)e^x$.
On désigne par (c_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- 1) Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (1 pt)
 - 2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (c_f) . (0, 5 pt)
 - b) Etudier la position de (c_f) par rapport (D). (0, 5 pt)
 - 3) a) Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. (0, 75 pt)
 - b) Dresser le tableau de variation de f . (1 pt)
 - 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α Dans l'intervalle $[-1 ; 0]$. justifier que $-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$. (1pt)
 - 5) a) Montrer que f admet une réciproque. On notera f^{-1} cette réciproque. (0, 5 pt)
 - b) Montrer que $(f^{-1})'(0) = -\frac{\alpha+2}{\alpha^2+\alpha-5}$. (0, 5 pt)
 - 6) Tracer la courbe (c_f) et la droite (D) dans le repère. (1 pt)
 - 7) On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (c_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$ avec $m < 0$.
 - a) Calculer A_m . (0, 75 pt)
 - b) Calculer la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$. (0, 5 pt)