

Exercices d'entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe : TSExp

2025 - 2026

Fonctions logarithmes et exponentielles de Neper

John Napier (1550 ; 1617) est un mathématicien écossais

Exercice 01 : Simplifie les expressions suivantes

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}); B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3; C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}; D = \ln 2\sqrt{2} + \ln 2^2 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E = -2 \ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2}{2} \right); G = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2} \ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}}$$

Exercice 02 : Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \ln x^3; g(x) = \ln x^4; h(x) = \ln|x|; P(x) = \ln \left| \frac{x-3}{1-x^2} \right|; Q(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{2-x}};$$

$$T(x) = \frac{1 - \ln x}{(1 - 2x)^2}; k(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

Exercice 03

A. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) 2 \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln \left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) + \ln \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right);$$

$$b) \ln(x^2 - 4x + 5) = 0; c) \frac{1}{3} \ln(x - 3) + \frac{1}{3} \ln(x - 1) = \ln 2;$$

$$d) \ln(2x - 3) + 2 \ln(x + 1) = \ln(6x - 3); e) \ln(x - 1) + \ln \left(\frac{2}{x} \right) = 0$$

$$f) \frac{1}{3} \ln|x - 3| + \frac{1}{3} \ln|x - 1| = \ln 2; g) \ln(\sin x) + \ln(\tan x) = \ln(\cos x);$$

$$h) \ln(4 - 2x) \leq 0; i) \ln(x + 2) \leq \ln(x^2 - 4); j) \ln(x + 2) + \ln(x + 4) < \ln(x + 8)$$

$$k) \ln x + \ln(3 - x) \geq \ln 2; l) \ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x; m) (\ln x)^2 - 6 \ln x + 5 \geq 0.$$

B. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$a) 3e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}; b) e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0; c) 3^{2x+2} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

$$d) 4^{-x} = 3; e) 3^x > 6; f) 2^{-x} \geq 3; g) 3^{-x} \leq 3^{2x}$$

Exercice 04

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Vérifie que $P(x) = (x - 1)(2x - 1)(x + 3)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

3) Déduis en les solutions des équations suivantes :

$$a) \ln 2x - \ln 3 = \ln(1 + x^2) - \ln(4 - x^2)$$

$$b) 2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0.$$

$$c) 2e^{3x} + 3e^{2x} - 8e^x + 3 = 0.$$

Exercice 05

Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1) Calcule $P(1)$. Détermine les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$: a) $P(x) = 0$ b) $P(x) < 0$.

3) En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations ou inéquations :

a) $2(\ln x)^2 + \ln x = \frac{5 \ln x - 2}{\ln x}$

d) $2(\log_3 x)^3 + (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 2 = 0$

b) $2[(\ln x)^3 + 1] < 5 \ln x - (\ln x)^2$

e) $2e^{2x} + e^x - 5 + 2e^{-x} = 0$

c) $\ln(x+3) + \ln(2x^2 - 5x + 2) = \ln(4 - 8x)$

f) $2 \times 7^{3x} + 7^{2x} - 5 \times 7^x + 2 = 0$

Exercice 06

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} 2 \ln x - 3 \ln y = 9 \\ \ln x + 5 \ln y = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$; d) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^x + e^y = 4 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 5 \\ e^x - e^y = -7 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 4^x \cdot (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \cdot 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$; h) $\begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \log_4^x + \log_2^y = \frac{1}{2} \end{cases}$; j) $\begin{cases} xy = 243 \\ \log_x y + \log_y x = \frac{17}{4} \end{cases}$; k) $\begin{cases} xy = e^2 \\ 3 \log_x y + 3 \log_y x = -10 \end{cases}$

Exercice 07

A. Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes

$f(x) = \ln(x^3 + 5x^2)$; $g(x) = \ln\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right)$; $h(x) = e^{1-3x}$; $p(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$; $q(x) = \frac{e^{x+2}}{1 - 3e^x}$

B. Trouve une primitive de chacune des fonctions suivantes

$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$; $h(x) = e^{2x+1}$; $P(x) = xe^{x^2+1}$; $q(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

C. Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x - 3)dx$; $I_2 = \int_0^1 e^{2x-1} dx$; $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$; $I_4 = \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x}{e^x + 2} dx$;

$I_5 = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx$; $I_7 = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$; $I_8 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$; $I_9 = \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x \ln x} dx$

D. Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$I = \int_1^e \ln x dx$; $J = \int_{-1}^0 \ln(x+2) dx$; $K = \int_e^{2e} x \ln x^2 dx$; $L = \int_0^1 (x+2)e^x dx$;

Exercice 08

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

1) Trouver les réels a et b tels que : $\forall x \neq -1$; $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) En déduire la valeur de $I = \int_0^3 f(x) dx$.

II. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$.

1) Trouver les réels a , b et c tels que : $\forall x > 0$; $h(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.

2) Calculer $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) dx$

Exercice 09

On donne les fonctions $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$.

b) En déduire le calcul de l'intégrale $K = \int_1^2 \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} dx$.

Exercice 10

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- 1) Calculer I_0 .
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$, en utilisant une intégration par parties, trouver I_{n+1} en fonction de I_n .
- 3) En déduire I_1, I_2, I_3 puis I_4 .

Exercice 11

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

1. Calcule $I + J$ et $I - J$.
2. En déduis les valeurs de I et J.

Exercice 12 : Soit $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$; $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$ et $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$

1. A l'aide de 2 intégrations par parties, prouve que $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.
2. a) Calcule $I + J$.
b) Montre que $K = I - J$.
c) En déduis les valeurs de I et J.

Exercice 13 : Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

Calcule la dérivée de f . En déduis la valeur de I.

- 2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifie que : $J + 2I = K$.
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontre que : $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduis les valeurs de J et de K.

Exercice 14 : (Corrigé dans DNI MATHS TSEXP)

A) L'aire A (en cm^2) de la peau d'un cobaye, en fonction de son poids P (en gramme) est donnée par l'égalité suivante : $\ln A = \ln(9,85) + 0,64 \ln P$ ($\ln$ désignant le logarithme népérien).

1. Quelle est l'aire A de la peau d'un cobaye de poids $P = 780g$?
2. Quel est le poids P d'un cobaye dont la peau a pour aire $A = 30 \text{ cm}^2$?

B) Pour déterminer l'âge d'un fossile ou d'un os, on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times \ln k$.

1. Le squelette d'un «homme du Cro-Magnon» contient 5% de carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?
2. Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie : $51,8\% < k < 53,8\%$.
Donne un encadrement de l'âge de ce fossile.

Problème 01

A) On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

B) On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$

- 1) Etudier les variations de f .

- 2) Démontrer que la courbe (Cf) admet la droite (Δ) d'équation $y = -x + 3$ comme asymptote oblique. Etudier la position de (Cf) par rapport à (Δ) .
- 3) Déterminer les coordonnées du point A de (Cf) où la tangente (T) à (Cf) est parallèle à (Δ) . Donner une équation de cette tangente.
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1]$; puis une solution unique $\beta \in [3 ; 4]$. Donner un encadrement de chacune des solutions à 0,1 près.
- 5) Tracer (Cf) et (Δ) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- 6) Déterminer l'aire A de la région du plan limitée par (Cf) ; la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Problème 02 (Corrigé dans DNI MATHS TSEXP)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$

1°/ a) Déterminez l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble.

- b) On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2 \ln x$:

■ Etudiez les variations de h sur $]0 ; +\infty[$. (1pt)

■ En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. (0,5pt)

- c) Etudiez les variations de f ; dressez son tableau de variation. (1,5pt)

- d) Prouvez que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (Cf) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. (0,5pt)

2°/ a) Tracez la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé (1pt)

- b) On désigne par $A(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (Cf) , Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculez $A(k)$. (1,5pt)

- c) Pour quelle valeur de k a-t-on $A(k) = 8$? (1pt)

Problème 03

- 1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

- a) Dresser le tableau de variation de g .

- b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.

- c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

- 2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique (2 cm).

- a) Dresser le tableau de variation de f .

- b) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2.10^{-3} .

- c) Tracer (C) dans le repère.

Problème 04

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = -x + e + \frac{\ln|x|}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- A. On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln|x|$
1. Dresser le tableau de variation de g .
 2. Calcule $g(1)$ et $g(-1)$. Déduis-en le signe de $g(x)$ sur D_g .
- B. Etude de f :
1. Dresser le tableau de variation de f .
 2. Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + e$ est asymptote à (C) puis étudie la position relative de (C) par rapport à (D) . On précisera les points d'intersection de (C) et (D) .
 3. Trace (C) dans le repère.
 4. Détermine l'aire A , en cm^2 de la région du plan limitée par (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 05

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 3 + 3 \ln x$.

1. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
b) Calcule la dérivée $g'(x)$ et dresse le tableau de variation de g .
2. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifie que $1,59 < \alpha < 1,60$.
b) Déduis-en le signe de g sur l'intervalle I .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(x-3)\ln x}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifie que $f(x) = \ln x - \frac{3 \ln x}{x}$.
2. a) Démontre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$.
b) Interprète graphiquement les limites précédentes.
3. a) Calcule la dérivée $f'(x)$. Vérifie que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
b) Montre que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-3)^2}{3\alpha}$ et donne une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.
c) Dresse le tableau de variation de fonction f .
4. a) Détermine une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.
b) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
- c) Trace (C) et T .
- d) Discute graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m , le nombre de solutions de l'équation $2x^2 - mx + x \ln x - 3 \ln x = 0$.
5. a) Calcule l'intégrale $J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.
b) En utilisant une intégration par parties, calcule l'intégrale $I = \int_1^e \ln x dx$.
c) Justifie que l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est donnée par $S = -\int_1^e f(x) dx$. Calcule cette aire.

Problème 06 : (Corrigé dans DNI MATHS TSEXP)

- A) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.
- 1) Etudie le sens de variation g puis dresse le tableau de variation.

- 2) Démontre qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$ avec $0,65 < \alpha < 0,66$.
- 3) Etudie le signe de g sur $]0; +\infty[$.
- B) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative.
 - 1) Montre que la droite (D) d'équation : $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
 - 2) Démontre que : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.
 - 3) Dresse le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
 - 4) a) Sachant que $g(\alpha) = 0$, démontre que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.
 b) Démontre que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.
 Déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$.
 - 5) Trace (D) et (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.
 - 6) En remarquant que $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x$, détermine une primitive F de f puis calcule l'aire du domaine limité par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{-1}$.

Problème 07

A// Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$.

1. Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. Calcule $g(1)$ et en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B// On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - x + 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité graphique : 2cm)

4. Calcule les limites de f en 0 et $+\infty$.
5. a) Calcule $f'(x)$ et vérifie que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
 b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
6. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[1; +\infty[$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.
7. a) Montre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C).
 b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).
8. Trace (C), (D) et (T).
9. Calcule en cm^2 , l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Problème 08 : (Corrigé dans DNI MATHS TSExp)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{|x+2|} - x$;

C_f est la courbe représentant ses variations dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

- a) Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- b) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition, on précisera les

asymptotes à C_f .

c) Calculer la fonction dérivée de f , en déduire les variations de f et tracer C_f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

F est la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par : $F(x) = \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

a) Vérifier que F est la primitive de f sur $] -2; +\infty[$ qui s'annule en -1 .

b) Etudier les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe (Γ) dans un repère autre que celui qui a servi pour tracer C_f .

d) Préciser les ordonnées des points d'abscisses 1 et 2 de cette courbe (Γ) .

Problème 9

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = x + \frac{1}{2} - x \ln x$.

1. Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -\ln x$.

b) En déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.

3. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $3,1 < \alpha < 3,2$.

b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$, par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x(1 - x \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J) . (Unité graphique : 2 cm)

1. a) Montre que f est continue en 0.

b) Etudie la dérivabilité de f en 0.

c) Calcule la limite de f en $+\infty$.

d) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat.

2. On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3. Montre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{4}$.

4. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Détermine une équation de (T) .

5. Trace (C) et (T) . (On prendra $\alpha \approx 3,2$ et $f(\alpha) \approx 3,3$).

Partie C: Calcul d'aire

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $h(x) = \frac{1}{9}x^3(-1 + 3 \ln x)$.

1. Détermine la dérivée de h .

2. En déduis la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ telle que $F(1) = e$.

3. Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Problème 10

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - 2\ln x$.

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1,2 < \alpha < 1,3$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{3}x$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

1. a) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat en 0.
2. a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Montre que la droite $(\Delta) : y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
4. Montre que $f(\alpha) = \frac{1-\alpha^3}{2\alpha^2}$.
5. a) Détermine le point A de (C) en lequel la tangente (T) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.
b) Détermine l'équation réduite de cette tangente (T).
6. Construis (C), (Δ) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

1. Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.

En utilisant une intégration par partie, calcule l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$.

- 2) Détermine $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Problème 11

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par: $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$.

1. Justifie que l'ensemble de définition de g est $D_f =]-\infty; 0[$.
2. Calcule les limites de g en $-\infty$ et 0.
3. a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction numérique définie sur $] -\infty ; 0]$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \ln(-x) \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm)

1. a) Montre que f est continue en 0 .
b) Etudie la dérivabilité de f en 0 .
2. a) Calcule la limite de f en $-\infty$.
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ce résultat.
3. a) Montre que $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 2g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4. Ecris l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 .
5. Trace (C) et (T).

PARTIE C : Calcul d'aire

On donne $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 \ln(-x) - \frac{1}{2}x^2$ pour $x < 0$.

1. Justifie que F est une primitive de f .
2. Soit α un réel tel que $-1 < \alpha < 0$.

Calcule l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = -1$ et $x = \alpha$.

3) En déduis la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 .

Problème 12

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 2 cm .

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f .
2. Etudie la parité de f .
3. Démontre que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
4. Calcule $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f .
5. a) Montre que f réalise une bijection sur D_f vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Explicite la réciproque f^{-1} de f .
6. a) Démontre que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
b) Donne l'équation de la tangente (T) à (C) au point I.
c) Etudie la position de (C) par rapport à (T).
7. Trace (C) et (T) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.
8. a) A l'aide d'une intégration par parties, calcule l'intégrale $I = \int_0^2 f(x)dx$.
b) Interprète l'intégrale I.
c) Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
9. Soit $K = \int_{-2}^2 f(x)dx$. Sans calculer K explique pourquoi $K = 0$.

Problème 13

A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + (x + 3)e^x$

- 1) Dresser le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé)
- 2) Préciser l'extremum de g sur $\mathbb{R}$.
- 3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

- B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x + 2)e^x$.
On désigne par (c_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
- 1) Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - 2) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (c_f) .
b) Etudier la position de (c_f) par rapport (D).
 - 3) a) Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
 - 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α Dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
justifier que $-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$.
 - 5) a) Montrer que f admet une réciproque. On notera f^{-1} cette réciproque.
b) Montrer que $(f^{-1})'(0) = -\frac{\alpha+2}{\alpha^2+\alpha-5}$.
 - 6) Tracer la courbe (c_f) et la droite (D) dans le repère.
 - 7) On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (c_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$ avec $m < 0$.
a) Calculer A_m .
b) Calculer la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 14 : Corrigé dans Doni Maths TSExp 2^e édition

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$; On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ unité graphique 2 Cm.

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

- 1) Étudie les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calcule la dérivée de g et détermine son signe.
- 3) Déduis - en le tableau de variation de g .
- 4) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
- 5) Déduis - en le signe de g .

II.1) Étudie les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- 2) Détermine $f'(x)$ pour tout réel x .
- 3) Déduis - en, à l'aide de I) les variations de f et donne son tableau de variation.
- 4) Prouve que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
- 5) Montre que $(D) : y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Précise la position de (C) par rapport à (D) .
- 6) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.
- 7) Trace (C) ; (D) et (T) .

III. Détermine les réels a, b et c tels que la fonction P définie par: $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$.

1. a) Calcule en fonction de α , l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2 de la partie limitée par (C) , (D) et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.
b) Calcule la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ en $+\infty$.

Problème 15 : Corrigé dans Doni Maths TSExp 2^e édition

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudie les variations de f .
- 3) Soit (C) la courbe représentative de f d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm)
Montre que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis précise la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.
- 4) Montre que le point $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour (C) .
- 5) Donne une équation de la tangente en I à (C) .
- 6) Construis (C) .

Problème 16

Partie A : On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

- 1) Démontre que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$
- 2) Etudie le sens de variation de g , puis dresse son tableau de variation.
- 3) Calcule $g(0)$. Déduis en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 4) a) Calcule $\int 2te^{2t} dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) Déduis en la primitive de la fonction g qui prend la valeur 3 en 0.

Partie B : On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité 2cm).

- 1) Etudie la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Démontre que la courbe (C) admet pour asymptote en $-\infty$ la droite $(D): y = x + 3$. Etudie suivant les valeurs de x les positions relatives de (D) et (C) .
- 3) Dresse le tableau de variation de f .
- 4) Démontre que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectifs α_1 et α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$).
- 5) Montre que $\alpha_1 \in [-3, 1]$ et $\alpha_2 \in [0, 1]$. Détermine et justifie un encadrement d'amplitude 0,1 de α_2 .
- 6) Trace la courbe (C) et la droite (D) .
- 7) m est un nombre réel négatif. On désigne par A_m l'aire de la partie du plan limitée par (C) , (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = m$.
- a) Calcule A_m .
- b) Calcule la limite de A_m lorsque m tend vers $-\infty$.

Problème 17

A. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Détermine la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Etudie le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
a) Vérifie que 0 en est une.
b) L'autre solution est appelé α . Montre que $-1,6 < \alpha < -1,5$

4. Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x .

B. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1. Détermine la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$).

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie A.) Etudie le sens de variation de f .

3. Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A.

Déduis - en un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 < \alpha < -1,5$)

4. Etablir le tableau de variation de f .

5. Tracer la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

6. Détermine l'aire A de la région du plan limitée par (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Problème 18

Partie A

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 + (x - 1)e^{-x}$.

1. Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g .
 - a) pour tout nombre réel x , calcule $g'(x)$ puis étudie son signe suivant les valeurs de x .
 - b) Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; 2[$.
b) Justifie que : $-0,38 < \alpha < -0,37$.
4. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$.

On notera (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 1 cm).

1. a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
b) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Donne une interprétation graphique des résultats.
2. a) Justifie que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
b) En déduis le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) et (D).
4. a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point J(0; 1) est : $y = x + 1$.
b) Etudie les positions relatives de (C) et (T).
5. Construis (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = -0,38$.
6. a) Détermine les réels a et b tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \rightarrow -xe^{-x}$.
b) Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Problème 19

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$.

1. Détermine les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Démontre que, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$.
b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) Justifie que : $0,4 < \alpha < 0,5$.
4. En déduis que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

(Unité : 2 cm)

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Démontre que f est une primitive de g .
b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (D) et (C).
4. Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
6. Démontre que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.
7. Justifie que, pour tout nombre réel x , $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$.
8. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
On appelle β l'une de ces solutions. Démontre que $-\beta + 2$ est l'autre solution.
- 9) Trace (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$.

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Calcule $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 20 : (Extrait de DONI Maths TSExp 2^e édition)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (-2x - 4)e^{-\frac{x}{2}} + 2 - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Pour tout réel x , on considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x - e^{\frac{x}{2}}$$

- 1) Etudie les variations de la fonction g .
- 2) Déduis - en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

- 1) Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2 - x)]$ puis interprète.
- 3) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = g(x)e^{-\frac{x}{2}}$.
- 4) Déduis - en le sens de variation de f .

- 5) Détermine les coordonnées du point B intersection de la courbe (C_f) de f et de son asymptote oblique (D) . Déduis – en la position de (C_f) et (D) .
- 6) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $\mathbb{R}$ et justifie que $-2 < \ell < -1$.
- 7) Donne une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
- 8) Trace (D) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 9) Calcule l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , (D) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

Problème 21

PARTIE A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$$

1°) a) Etudie les variations de f .

b) Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 1 + x]$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ? Tracer cette courbe.

(Unité : 2cm).

c) Montre que f réalise une bijection de $] -\infty ; +\infty[$ sur $] -\infty ; 0[$.

2°) Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$.

a) Démontre que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montre que quel que soit le réel x , $g'(x) = e^{-x} f(x)$.

c) Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$.

d) Etudie les variations de g et trace sa courbe représentative dans le repère précédent.

3°) a) Montre que $\frac{1}{e^{x+1}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

b) A tout réel λ , on associe le réel $I(\lambda) = \int_0^\lambda g(x) dx$. Justifie l'existence de $I(\lambda)$.

Calcule $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c) Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

PARTIE B

1°) Montre que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

2°) a) Calculer $g(0)$.

b) Montre que g^{-1} est dérivable en $\ln 2$.

c) Détermine l'équation de la tangente à $(C_{g^{-1}})$ au point d'abscisse $\ln 2$.

Problème 22

Soient la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique **3 cm**.

- 1) Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on dire pour la courbe ?
- 2) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour $x \in [0 ; +\infty[$.
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution m , montrer que $m \in [1 ; 2]$ et déterminer un encadrement de m à 10^{-1} près par dichotomie.

5) Tracer (T) et (C) sur la même figure.

6) a) Déterminer les réels a et b tels $\forall x \neq -1; \frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.

b) En déduire l'aire cm^2 du domaine limité par (T) ; (C) et la droite $y = 1$.

Problème 23

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par :

$f_m(x) = e^{x-1} - mx$ où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité $2cm$).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

2) Montrer que la droite Δ_m d'équation : $y = -mx$ est une asymptote à la courbe (C_m) et déterminer la position de cette droite par rapport à (C_m) .

3) Etudier la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (C_1) dans le repère.

4) Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1; +\infty[$. Montrer que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$. Représenter la courbe (C_1') de $(g_1)^{-1}$.

5) Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (C_1) , la droite $\Delta_1: y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$, ($\alpha < 1$).

Problème 24 : (Corrigé dans DNIMATHS TSEXP)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie. Des relevés statistiques ont permis de modéliser le nombre de malades durant l'épidémie par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$ où t représente le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1. Calcule $f'(t)$.

2. a. Etudie le signe de $f''(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$.

b. Dresse le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[1; 26]$.

c. Montre que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1; 26]$ dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.

d. En déduis le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[1; 26]$ puis les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 26]$.

3. On admet que $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a. Dans le contexte du problème, donne une interprétation du tableau de variations de la fonction dérivée f' obtenu à la question 2.

En se servant des questions précédentes, détermine le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malade par semaine a commencé à diminuer.

Problème 25 : Extrait du Bac 2012 T. S.Exp (2^{ème} groupe)

Partie A

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de $3m$ d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en m en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0; 12]$ par $f(t) = 3e^{-0,1t}$.

1°/ Déterminez $f'(t)$ et justifier que pour tout $t \in [0; 12]$, $f'(t) < 0$.

2°/ Dressez le tableau de variation de f sur $[0 ; 12]$.

3°/ Calculez $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

4°/ Tracez la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).

Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à 1,25ml, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?

(On déterminera ce temps graphiquement et par calcul).

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de 4,5ml. Le patient court-il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

Problème 26 : Extrait du Bac 2011 T. S.Exp

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une Petrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$ où t représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1) a) Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b) Montrer que $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 2}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

On appelle cette valeur la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe (C) de f ?

c) L'équation $f(t) = 4$ admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

2) Montrer que la dérivée f' de f vérifie $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$. En déduire le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

3) Soit (T) la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C). Déterminer l'équation de (T).

4) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

5) Tracer (C), (T) ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à (C).

6) Calculer à la minute près l'instant t_0 où le nombre de bactéries sera égal à 200.

7) Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, la population de cette colonie dépassera 80% de sa saturation.

Problème 27 : (Corrigé dans DNIMATHS TSEXP)

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[10 ; 100]$ par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$

1) Calculer $f'(x)$.

2) Démontrer que $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10 ; e^3]$ et négative sur $[e^3 ; 100]$.

3) Dresser le tableau de variations de f .

Partie B

On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge.

x représenté en années et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres, on admet que sur l'intervalle $[10; 100]$ on a : $g(x) = 110f(x)$. où f est la fonction définie dans la partie A

- 1) Calculer la capacité pulmonaire à **10 ans; 15 ans; 30 ans et 60 ans.**
- 2) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthogonal (en abscisse : **1cm pour 10 ans** et en ordonnées **3cm pour 1 litre**).
- 3) À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?
- 4) Déterminer graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à **5 litres**.

Problème 28 : (Corrigé dans DNIMATHS TSEXP)

- A. Le plan P est muni du repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : **4 cm** sur l'axe des abscisses et **2 cm** sur l'axe des ordonnées. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x}).$$

- 1) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$
 - 2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - 3) Démontrer que, pour tout x réel : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
 - 4) Donner le tableau de variation de f .
 - 5) Représenter la fonction f dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- B. On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t , (t positif exprimé en secondes), la concentration y de la substance injectée est : $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On appelle « *concentration* » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité de sang qui le contient.
- 1) En utilisant les résultats de la partie A., donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t en secondes.
 - 2) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?
 - 3) Calculer au bout de combien de temps la concentration retombe au quart de sa valeur maximale. Vérifier graphiquement en utilisant la question 5) du A.
 - 4) Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t , $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3} .

Problème 29

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$.

1. a) Détermine l'ensemble de définition de g .
b) Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. a) Montre que $\forall x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$, $g'(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$.
b) En déduis les variations de g et dresse son tableau de variation.
3. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,7 < \alpha < 0,8$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)\ln |x - 3|$.

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

- a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 3 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite en 3.
- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
- a) Montre que $\forall x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[, f'(x) = g(x)$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse alors son tableau de variation.
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{3-\alpha}$.
- Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
- Trace (C). (On prendra $\alpha = 0,8$)

PARTIE C: Calcule d'aire

- a) Détermine les réels a, b et c tels que $\forall x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[, \frac{x^2+2x}{3-x} = ax + b + \frac{c}{3-x}$.
b) En déduis la valeur de $I = \int_0^2 \frac{x^2+2x}{3-x} dx$.
- A l'aide d'une intégration par parties, calcule en cm^2 l'aire de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

PARTIE D : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]3; +\infty[$.

- Montre que h réalise une bijection de $]3; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
- Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .
 - Montrer que h^{-1} est dérivable en 0.
 - Calcule $(h^{-1})'(0)$.
- Construis (C') la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.