

Problème 3

Étude de fonctions logarithmiques

$$g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln x + x + 1$$

En 0^+ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} x &= 0, & \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 &= 1 \\ \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= -\infty + 0 + 1 = -\infty \end{aligned}$$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= +\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

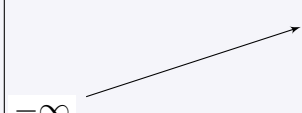
g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

Pour tout $x > 0$: $x > 0$ et $1+x > 0$, donc $g'(x) = \frac{1+x}{x} > 0$.

g est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$



a) Existence et unicité de α :

g est **continue** (car $\ln$ et les fonctions polynômes le sont) et **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$, avec $\lim_{0+} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

Par le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0$ admet **une solution unique** $\alpha \in]0; +\infty[$.

Encadrement : On calcule (valeurs approchées) :

$$g(0,27) = \ln(0,27) + 0,27 + 1 \approx -1,3093 + 1,27 \approx -0,039 < 0$$

$$g(0,28) = \ln(0,28) + 0,28 + 1 \approx -1,2730 + 1,28 \approx +0,007 > 0$$

$g(0,27) < 0$ et $g(0,28) > 0$, et g est croissante, donc :

$$0,27 < \alpha < 0,28$$

b) Signe de $g(x)$:

g est strictement croissante et s'annule uniquement en α :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Continuité en 0 :

Il faut vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x + 1}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

f est continue en 0.

b) Dérivabilité en 0 :

On calcule le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x(x + 1)} = \frac{\ln x}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x + 1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

La limite est infinie, donc f **n'est pas dérivable en 0**. La courbe (C) admet une **demi-tangente verticale** en $x = 0$ (vers le bas).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + 1}$$

On factorise x au dénominateur :

$$\frac{x \ln x}{x + 1} = \frac{x \ln x}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

Nature de la branche infinie : On étudie $\frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Comme $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow +\infty$, la courbe (C) admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $+\infty$.

a) Calcul de $f'(x)$ pour $x > 0$:

On pose $u = x \ln x$ et $v = x + 1$:

$$u' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad v' = 1$$

Par la règle du quotient :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(\ln x + 1)(x + 1) - x \ln x}{(x + 1)^2}$$

Développons le numérateur :

$$(\ln x + 1)(x + 1) - x \ln x = x \ln x + \ln x + x + 1 - x \ln x = \ln x + x + 1 = g(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2}} \quad \checkmark$$

b) Variations de f :

Comme $(x + 1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. D'après l'étude de g :

- Sur $]0; \alpha[$: $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est **décroissante**.
- Sur $]\alpha; +\infty[$: $g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est **croissante**.

f admet un **minimum** en $x = \alpha$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

Note : on montrera en B.4 que $f(\alpha) = -\alpha \approx -0,27$.

Par définition de f :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha + 1}$$

Or α est la solution de $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\ln \alpha + \alpha + 1 = 0 \implies \ln \alpha = -\alpha - 1$$

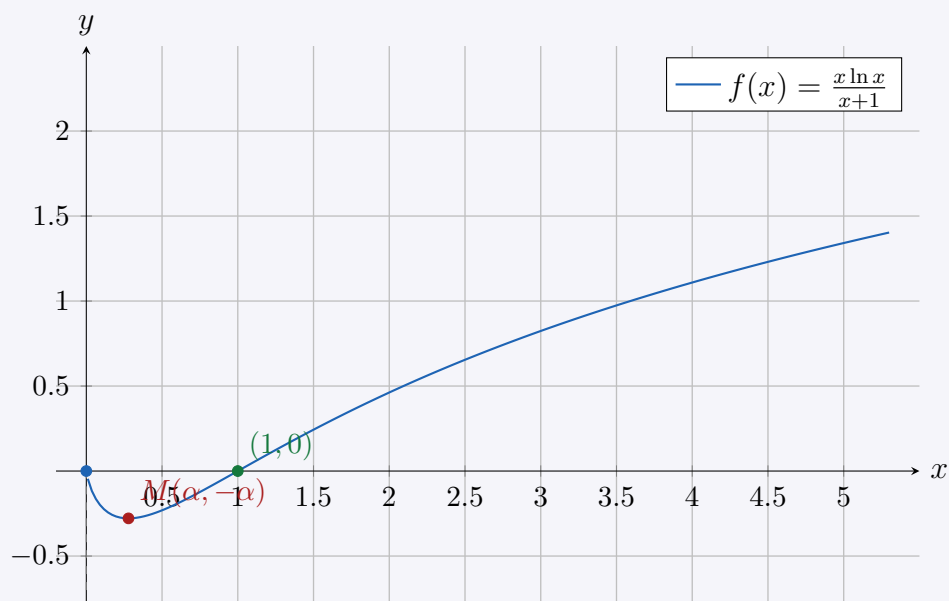
On substitue :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{\alpha + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{\alpha + 1} = \frac{-\alpha \cdot \cancel{(\alpha + 1)}}{\cancel{(\alpha + 1)}}$$

$$f(\alpha) = -\alpha$$

Éléments de construction :

- **Demi-tangente verticale** en $O = (0, 0)$ (vers le bas)
- **Minimum** au point $M = (\alpha, -\alpha) \approx (0,28; -0,28)$
- La courbe **passer par** $(1, 0)$ car $f(1) = \frac{1 \cdot 0}{2} = 0$
- **Branche parabolique** vers $+\infty$ (direction axe Oy)
- Valeurs repères : $f(e) = \frac{e}{e+1} \approx 0,731$



Outils utilisés : TVI, croissances comparées, dérivation d'un quotient, substitution algébrique.