

TD Fonctions Logarithmes. TSEXP

Propriétés de la fonction logarithme

1 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprime en fonction de $\ln 2$ les réels suivants :

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2} ; B = \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 + \sqrt{2})$$

$$C = \ln 2\sqrt{2} + \ln 4 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2^3} ; D = \ln 64 + \frac{5}{3} \ln 8 - \ln \sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(2x + 7) = \ln(x - 3)$; **b)** $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7)$

c) $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$; **d)** $\ln(x - 3) = \ln(x + 7) - \ln(x + 1)$.

e) $\ln(2x - 2) + \ln(x + 2) = 3\ln 2$; **f)** $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = 2\ln(x + 1)$.

g) $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$; **h)** $(\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0$;

i) $3[\ln(x + 1)]^2 - 2\ln(x + 1) - 5 = 0$; **j)** $6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} + 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x} = \sqrt{2}$

k) $x^{\log_5 x} = 125x^2$; **m)** $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a$

$(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$; **n)** $\cos^2(\ln x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\ln x^2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a- $\ln(x + 8) - \ln(x + 14) + \ln(x + 2) \leq 0$; **b-** $\ln(2x - 1) - \ln(1 - x) < \ln 3$

c- $\ln(x + 1) > \ln(4x - 1) - \ln(x - 1)$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a- $\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}$; **b-** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$; **c-** $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

d- $\begin{cases} \ln x \times \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$; **e-** $\begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases}$

2 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calcule $q(1)$ puis résous les équations $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$

2) En déduis la résolution de :

a- L'équation : $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0$

b- L'inéquation $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 \geq 0$

Application des limites de la fonction logarithme

3 Calcule la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = \ln(2 - x)$; 2) $f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$; 3) $f(x) = (x + 1)\ln x - x$

4) $f(x) = \ln|-x^2 + 2x + 3|$; 5) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$; 6) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

7) $f(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1$; 8) $f(x) = \frac{\ln|\cos x|}{x^2}$; 9) $f(x) = (2x - 1)\ln(2x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

- 4** 1) Calcule la dérivée des fonctions suivantes :
 a- $f(x) = \ln(2x + 7)$; b- $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$; c- $f(x) = (x + 7)\ln(3x + 2)$
 d- $f(x) = \ln\sqrt{2x - 3}$; e- $f(x) = [\ln(x + 1)]^3$; f- $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)$

g- $f(x) = \ln(x^3 - x)(x^2 + 2)$; h- $f(x) = \sqrt{x - 1} \ln(-x + 1)$

2) Calcule la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = \ln(2x + 7)$; b- $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$; c- $f(x) = \frac{-x + 1}{x^2 - 2x - 5}$
 d- $f(x) = \ln(3 - x)$; e- $f(x) = \frac{7}{2x - 5}$; f- $f(x) = \ln x + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x - 5}$

g- $f(x) = \frac{2}{x \ln x}$; h- $f(x) = \frac{2 - \frac{2}{x}}{x - \ln x}$

- 5** Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$
 1) Détermine les réels a, b et c tel que $\forall x \in]1 ; +\infty[$ $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$
 2) En déduis une primitive de la fonction g sur $]1 ; +\infty[$

Fonction logarithmes dans les cas pratiques

- 6** La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est $M = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

- 1) Calcule $\ln a$ sachant que $E = e^{15}E_0$ et $M = 5$
 2) En déduis la magnitude apparente des astres suivants :
 a- Soleil : $E = 0,5 e^5 E_0$; b- Lune : $E_0 = 10^{-5} E$

- 7** On veut étudier l'espérance de vie d'une personne testée positive au CORONAVIRUS « COVID 19 ». En effet la température corporelle humaine t (en °C) d'une personne ayant contractée le COVID 19 en fonction de son âge a (en année) est donnée par l'égalité suivante : $\ln t = \ln(0.45) + \ln a$ ($\ln$ désignant le logarithme népérien).

On rappelle qu'une personne testée positive peut espérer vivre si sa température corporelle est inférieure à 38°C.

- 1) Quelle est l'espérance de vie de Zan et Ali ayant respectivement 78 ans et 89 ans ?
 2) Détermine l'âge de Fatou ayant une température corporelle est 36,7°C.

- 8** Pour déterminer l'âge d'un fossile ou d'un os on mesure le pourcentage de "carbone 14" présent dans l'objet. En effet, à la mort d'un être vivant si k est le pourcentage de "carbone 14" restant au bout de N années, alors on a : $N = -8310 \times \ln k$.

- 1) Le squelette d'un « homme du Cro-Magnon » contient 5% de carbone 14 initial. Quel âge a-t-il ?

- 2) Le pourcentage k de carbone 14 contenu dans un fossile vérifie : $51,8\% < k < 53,8\%$. Donne un encadrement de l'âge de ce fossile.

- 9** Une étude scientifique a montré que la pandémie CORONAVIRUS « COVID 19 » a une vitesse de propagation modélisé par la fonction $v(t) = \frac{3000}{1 + 0,25t}$. Où t est le temps écoulé en mois.

On admet que cette vitesse est la dérivée de la fonction population p telque $p'(t) = v(t)$.

On suppose que à l'instant initial, le nombre de cas positif était de 1000 individus.

1) a- Détermine $p(t)$ désignant le nombre de cas positifs de population au bout de t mois.

b- Evalue le nombre de cas positifs au bout de 3 mois.

c- Après combien de mois le nombre de cas positif atteindra-t-il 12000 individus ?

2) Comment évolue la pandémie entre le 1^{er} et le 8^{ième} mois.

3) On donne la fonction h définie sur $[1 ; 8]$ par :

$$h(t) = 48000(1 + 0,25t)\ln(1 + 0,25t) - 11000t$$

a- Montre que h est une primitive de p sur l'intervalle $[1 ; 8]$.

b- Calcule en m^2 l'intégrale $\int_1^3 p(t) dx$ puis donne une interprétation concrète du résultat.

c- En déduis le nombre moyen de cas positif entre le 1^{er} et le 3^{ème} mois.

d- En déduis le nombre moyen de bactéries entre le 5^{ième} et le 10^{ième} jour.

10

Partie A Soit la fonction f définie sur $[10 ; 100]$ par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$.

1) Calcule f'

2) Démontre **que** $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $[10 ; e^3]$ et négative sur $[e^3 ; 100]$

3) Dresse le tableau de variations de f .

Partie B On se propose d'exprimer la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge x , représenté en années et $g(x)$ la capacité pulmonaire en litres. On admet que sur l'intervalle $[10 ; 100]$ on a : $g(x) = 110f(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A

1) Calcule la capacité pulmonaire à 10ans, 15ans, 30ans et 60ans.

2) Trace la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.

(On prendra en abscisse : **1cm** pour 10 ans et en ordonnées **1cm** pour 10 litres).

3) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?

4) Détermine graphiquement l'intervalle du temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres.

Problèmes

11

Partie A : Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresse le tableau de variation de g .

2) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$

Soit (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$

3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f .

b) Etudie le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ) .

4) Trace (Cf) et (Δ) dans le même repère.

12

Partie A : Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1) Dresse le tableau de variation de g

2) En déduis le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$

Soit (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dresse le tableau de variation de f .

- 2) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) , puis étudie la position de (C) par rapport à la droite (Δ) .
- 3) Détermine les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet en ce point une tangente (T) parallèle à (Δ) .
- 4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0,5 ; 1]$
- 5) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.
- 6) Hachure puis calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

13

Partie A : Soit la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

- 1) a- Dresse le tableau de variation de g .
 - b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.
 - c- Dédus de ce qui précède le signe de $g(x)$.
 - 2) Soit la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$.
- Soit (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)
- a) Dresse le tableau de variation de f .
 - b) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ puis en déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .
 - c) Trace (Cf) dans le repère.

Partie B : Soit la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

- 1) a) Prouve que F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ puis précise $F'(x)$.
- b) En déduis le sens de variation de F .
- 2) a) Vérifie que $\forall t \geq 1$; on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$
- b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$
 - A l'aide d'une intégration par parties, calcule $I(x)$
 - A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, Calcule $J(x)$.
- c) En déduis que $\forall x > 1$; on a : $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$
- d) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ , vérifie que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

14

Partie A : Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

- 1) Dresse le tableau de variation de g .
 - 2) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis en déduis le signe de $g(x)$
- Partie B :** Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
- $$h : t \mapsto \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \text{ et } k : t \mapsto \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$
- 1) Après une brève étude sur $[0 ; +\infty[$ des fonctions h et k ; démontre que : $\forall t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$
 - 2) En déduis que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

Partie C : Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Soit (Cf) la représentation graphique de f dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) En utilisant les résultats précédents, calcule la limite de f en $-\infty$
- 2) Etudie la continuité de f en 0
- 3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$
- 4) Dresse le tableau de variations de f
- 5) Détermine une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0 .
- 6) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.
- 7) Trace (Cf) .

15

Partie A : Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$

- 1) Dresse le tableau de variation de g .
- 2) Donne le signe de $g(x)$ sur $] 0 ; +\infty[$
- 3) Soit la fonction numérique f définie sur $] 0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

Soit (Cf) la représentation graphique de f dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

En utilisant les questions précédentes, dresse le tableau de variation de f .

- 4) Soit h la fonction définie sur $] 0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.
 - a- Dresse le tableau de variation de h .
 - b- Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$
 - c- Donne le signe de $h(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ puis en déduis l'égalité $e^{-\alpha} = \alpha$
- 5) a- Montre que la droite $\Delta : y = x$ est asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$.
 - b- Utilise les résultats de la question 4)-c pour déterminer la position relative de (Cf) et Δ .
 - c- Trace (Cf) et Δ dans le même repère.
- 6) Soient I l'intégrale définie sur $] 0 ; +\infty[$ par : $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$
 - a- En utilisant une intégration par parties, calcule I
 - b- Calcule l'aire du domaine plan limitée (Cf) ; Δ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Partie B : Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^{-x}$ et la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

- 1) Montre que si $x \in [0,4 ; 0,7]$ alors on a :
 - a- $\varphi(x) \in [0,4 ; 0,7]$
 - b- $|\varphi'(x)| \leq 0,7$
 - c- $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$
 - 2) Montre que si $n \in \mathbb{N}$ alors on a :
 - a- $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$
 - b- $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$
 - 3) Etudie la convergence de la suite u .
 - 4) Détermine un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donne à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.
- En déduis une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3} près

16

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

- 1) Dresse le tableau de variation de f .
- 2) Démontre que $\forall x \in]1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 0 et $\alpha \in]3,9 ; 4[$.
- 3) En déduis le signe de $f(x)$.

Partie B : Soit g la fonction définie par :
$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

On désigne par (Cg) la représentation graphique de la fonction g dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0.
- 2) Dresse le tableau de variation de g .
- 3) Construis (Cg)

Partie C :

- 1) Soit g_1 la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$.

Etudie la dérivabilité de g_1 en 0.

- 2) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

a- Démontre que φ est dérivable en tout point de $[0 ; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$

b- En déduis que $A = \int_0^1 g(t) dt = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

- 3) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

Soit k la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par $k(\theta) = \tan^2 \theta$

- a- Calcule $(hok)(0)$
- b- Prouve que $\forall \theta \in I$; on a : $(hok)'(\theta) = 4\tan^2 \theta$
- c- En posant $\tan^2 \theta = (\tan^2 \theta + 1) - 1$; détermine une primitive de $(hok)'$ puis donne l'expression de (hok)
- d- Calcule $h(1)$
- e- Déduis des résultats précédents la valeur exacte de A.

17

Partie A : Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

Soit (Cf) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

- 1) Dresse le tableau de variation de f
- 2) a- Donne l'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse I où I est le point d'inflexion de la courbe (Cf)
- b- Etudie la position de (Cf) et (T) puis trace (Cf) et (T) dans le même repère.
- 3) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$.

a- Calcule I en utilisant une intégration par parties.

b- En déduis en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , la tangente (T) et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$

Partie B : Soit la fonction numérique h définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A :**

- 1) Vérifie que h est la primitive de la fonction $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$

2) Calcule l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$

3) Soit l'intégrale (I_n) ; n appartenant à $\mathbb{N}$ définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$.

a- Calcule I_0 et I_1

b- Calcule l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^n x dx$

c- En déduis l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calcule I_2 ; I_3 et I_4

18

PARTIE A : Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - \ln x$.

Soit (Cg) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Dresse le tableau de variation de g .

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2 ; 3]$.

3) Déduis de ce qui précède le signe de $g(x)$.

PARTIE B : Soit la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x \ln x}$.

Soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Dresse le tableau de variation de f .

2) Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ puis en déduis un encadrement de $f(\alpha)$.

3) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

4) Trace (Cf) et (T) dans le même repère.

5) a- Montre que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln x}$ puis en déduis l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b- Montre que $A(\alpha) = 2 \ln(\alpha - 1)$ puis en déduis un encadrement de $A(\alpha)$.

6) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1.

a- Calcule $a_n = \int_1^n f(x) dx$. Interprète graphiquement ce résultat.

b- Etudie la convergence de a_n .

PARTIE C : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t) dt$.

Soit (Ch) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) a- Montre que $h(x) = \ln(e^x - x)$.

b- Montre que pour tout nombre réel, on a : $e^x > x$.

2) a- Calcule la limite de $h(x)$ et $\frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$. Interprète le résultat obtenu.

b- Montre que pour tout nombre réel, on a : $h(x) = x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

3) Etudie la position relative de (Ch) et de $(\Delta): y = x$

4) Dresse le tableau de variation de h puis Trace (Ch) .

19

PARTIE A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

Soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1) Montre que f est impaire.

2) Dresse le tableau de variation de f .

3) Détermine l'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.

4) Etudie la position de (T) et (Cf) .

5) Trace (T) et (Cf) .

- 6) Calcule en fonction de α ($\alpha \in \mathbb{R}$), l'aire de la partie du plan délimitée par (Cf) et les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE B :

- 1) Montre que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on précisera.
- 2) Construis dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g .
- 3) Montre que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.
- 4) Montre que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.
- 5) Calcule en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

PARTIE C : On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

- 1) Montre que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donne les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.
- 3) Etudie puis représente la fonction h sur $] -1 ; 1[$.