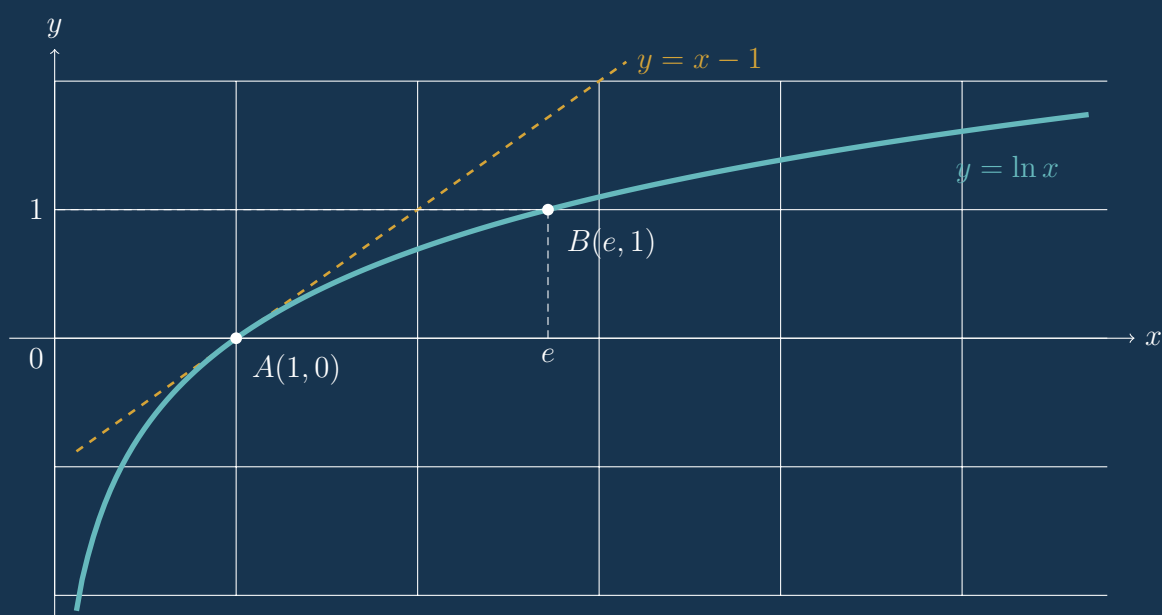


FONCTIONS LOGARITHMIQUES

2^e Bac Sciences Physiques

Comprendre les logarithmes, du calcul à la courbe.

UNE NOUVELLE FAÇON DE COMPARER



$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$a > 0, b > 0$$

90

QCM

18

SÉRIES

30

PAGES

Questions progressives · Réponses uniques · Corrigés courts

BIEN UTILISER CE LIVRET

Un parcours en 18 séries

Une seule bonne réponse par question

Choisir A, B, C ou D. Justifier son choix au brouillon, puis consulter la grille page 22 et les corrigés pages 23 à 30.

Trois gestes pour progresser

1. **Chercher.** Faire une série de cinq questions sans regarder les réponses.
2. **Comprendre.** Lire le corrigé même si la réponse est juste.
3. **Reprendre.** Refaire les questions manquées le lendemain.

Sommaire

Série et thème	p.	Série et thème	p.
01 Définition et valeurs usuelles	4	10 Croissances comparées	13
02 Domaines de définition	5	11 Dérivées usuelles	14
03 Propriétés algébriques	6	12 Dérivées de compositions	15
04 Simplifier une expression	7	13 Variations et extrema	16
05 Signe et comparaison	8	14 Tangentes et asymptotes	17
06 Équations simples	9	15 Lire un graphique	18
07 Équations et domaine	10	16 Primitives avec logarithme	19
08 Inéquations logarithmiques	11	17 Logarithme décimal	20
09 Limites aux bornes	12	18 Synthèse et pièges	21

Conventions. Les fonctions et les solutions sont réelles. $\ln$ désigne le logarithme népérien et $\log$ le logarithme décimal. La lettre e désigne le nombre tel que $\ln e = 1$.

Les séries « approfondissement » demandent davantage de raisonnement. Questions originales d'entraînement, avec des explications volontairement courtes.

FICHE MÉTHODE

Les réflexes essentiels

1 • Définir avant de calculer

$\ln x$ existe si $x > 0$. Plus généralement, $\ln u(x)$ exige $u(x) > 0$.

Valeurs de référence : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(e^a) = a$. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2 • Transformer sans inventer de règle

Pour $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln(a/b) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^r) = r \ln a.$$

Attention : $\ln(a + b)$ ne vaut pas $\ln a + \ln b$ en général. Pour $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$.

3 • Résoudre une équation ou une inéquation

Écrire le domaine, transformer, puis contrôler les solutions. Pour $u, v > 0$, $\ln u = \ln v \iff u = v$ et $\ln u < \ln v \iff u < v$.

Signe : $\ln x < 0$ sur $]0, 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1, +\infty[$.

4 • Reconnaître les limites usuelles

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= 0, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1. \end{aligned}$$

Transformer une différence de logarithmes en logarithme d'un quotient.

5 • Dériver et retrouver une primitive

Pour $x > 0$, $(\ln x)' = 1/x$. Si $u > 0$, $(\ln u)' = u'/u$.

Sur un intervalle où $u \neq 0$, une primitive de u'/u est $\ln |u|$. Pour étudier les variations, déterminer le signe de la dérivée.

6 • Passer au logarithme décimal

Pour $x > 0$, $\log x = \ln x / \ln 10$. En particulier, $\log(10^a) = a$.

Toujours distinguer $\ln$ (base e) et $\log$ (base 10 dans ce livret).

SÉRIE 01 / 18 · BASES

Définition et valeurs usuelles

Reconnaître les valeurs de référence.

Q1 Quelle est la valeur de $\ln 1$?

A. e

B. 0

C. 1

D. -1

Q2 Calculer $\ln(e^3)$.

A. e^3

B. $1/3$

C. $3e$

D. 3

Q3 Calculer $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$.

A. $-1/2$

B. -2

C. $1/2$

D. 2

Q4 Calculer $\ln \sqrt{e}$.

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{e}$

D. 1

Q5 Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, quelle égalité est vraie ?

A. $\ln(a/b) = \ln b - \ln a$

B. $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$

C. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

D. $\ln(ab) = (\ln a)(\ln b)$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 02 / 18 · BASES

Domaines de définition

Imposer un argument strictement positif.

Q6 Quel est le domaine de $f(x) = \ln(2x - 6)$?

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ **B.** $[3, +\infty[$
C. $]3, +\infty[$ **D.** $] - \infty, 3[$

Q7 Quel est le domaine de $f(x) = \ln(x^2 - 4)$?

- A.** $] - 2, 2[$
B. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
C. $[2, +\infty[$
D. $] - \infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Q8 Quel est le domaine de $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$?

- A.** $] - 2, 1[$
B. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
C. $] - \infty, -2[\cup]1, +\infty[$
D. $]1, +\infty[$

Q9 Quel est le domaine de $f(x) = \frac{1}{\ln x}$?

- A.** $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ **B.** $]1, +\infty[$
C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ **D.** $]0, +\infty[$

Q10 Quel est le domaine de $f(x) = \ln(\ln x)$?

- A.** $]1, +\infty[$ **B.** $]0, +\infty[$
C. $]0, 1[$ **D.** $[1, +\infty[$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 03 / 18 · BASES

Propriétés algébriques

Transformer un produit, un quotient ou une puissance.

Q11 Simplifier $\ln 2 + \ln 5$.

A. $\ln 7$

B. $\ln 10$

C. 10

D. $\ln 3$

Q12 Simplifier $\ln 12 - \ln 3$.

A. 4

B. $\ln 36$

C. $\ln 9$

D. $\ln 4$

Q13 Calculer $\frac{\ln 9}{\ln 3}$.

A. 6

B. $\ln 3$

C. 3

D. 2

Q14 Pour tout réel $x \neq 0$, on a :

A. $\ln(x^2) = (\ln |x|)^2$

B. $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$

C. $\ln(x^2) = \ln |x|$

D. $\ln(x^2) = 2 \ln x$

Q15 Pour $a > 0$ et $b > 0$, simplifier $\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$.

A. $\ln(3a - 2b)$

B. $\frac{3 \ln a}{2 \ln b}$

C. $3 \ln a - 2 \ln b$

D. $3 \ln a + 2 \ln b$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 04 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Simplifier une expression

Réduire une expression sans perdre les conditions.

Q16 Pour $x > 0$, simplifier $\ln(1/x) + \ln x$.

A. 0

B. $2 \ln x$

C. $\ln(x + 1/x)$

D. 1

Q17 Pour $x > 0$, simplifier $\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$.

A. $-\frac{1}{2} \ln x$

B. $\frac{1}{2} \ln x$

C. $\frac{\ln x}{2x}$

D. $-\ln x$

Q18 Pour $x > 1$, simplifier $\ln(x+1) + \ln(x-1)$.

A. $2 \ln x$

B. $\ln(2x)$

C. $\ln(x^2 - 1)$

D. $\ln(x^2 + 1)$

Q19 Pour $x > 0$, simplifier $\ln \sqrt{x+1} - \ln \sqrt{x}$.

A. $\ln 1$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+1)$

C. $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

D. $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Q20 Calculer $\ln 8 - 3 \ln 2 + \ln e$.

A. 0

B. 2

C. 1

D. $\ln 6$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 05 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Signe et comparaison

Utiliser la croissance de la fonction logarithme.

Q21 Quel est le signe de $\ln(2/3)$?

- A.** Nul
- B.** Strictement positif
- C.** Strictement négatif
- D.** Ce nombre n'est pas défini

Q22 Pour $a > 0$ et $b > 0$, l'inégalité $\ln a < \ln b$ équivaut à :

- A.** $a = b$
- B.** $a < b$
- C.** $a + b < 1$
- D.** $a > b$

Q23 Pour quels réels x a-t-on $\ln x > 0$?

- A.** $x \geq 1$
- B.** $x > 0$
- C.** $0 < x < 1$
- D.** $x > 1$

Q24 Quel classement est correct ?

- A.** $\ln 2 < \ln 3 < 0$
- B.** $\ln 2 < 0 < \ln 3$
- C.** $0 < \ln 3 < \ln 2$
- D.** $0 < \ln 2 < \ln 3$

Q25 Sur $]0, +\infty[$, où a-t-on $(x - 2) \ln x > 0$?

- A.** $]0, 1[\cup]2, +\infty[$
- B.** $]0, 2[$
- C.** $]1, 2[$
- D.** $[1, 2]$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 06 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Équations simples

Isoler le logarithme, puis retrouver son argument.

Q26 Résoudre $\ln x = 2$.

A. $x = 2e$

B. $x = e^2$

C. $x = \ln 2$

D. $x = 2$

Q27 Résoudre $\ln(3x - 2) = 0$.

A. $x = 1$

B. $x = 3$

C. $x = 2/3$

D. $x = 0$

Q28 Résoudre $\ln x = \ln(5 - x)$.

A. $x = -\frac{5}{2}$

B. $x = 0$

C. $x = 5$

D. $x = \frac{5}{2}$

Q29 Quel est l'ensemble des solutions de $\ln(x^2) = 0$?

A. $\{0\}$

B. $\emptyset$

C. $\{-1, 1\}$

D. $\{1\}$

Q30 Résoudre $2 \ln x = \ln 9$.

A. $x = 9/2$

B. $x = 9$

C. $x = \pm 3$

D. $x = 3$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 07 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Équations et domaine

Résoudre, puis éliminer les valeurs interdites.

Q31 Résoudre $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 8$.

A. $x = 4$

B. $x = -3$

C. $x = 3$

D. $x = \pm 3$

Q32 Résoudre $\ln(x+2) - \ln x = \ln 3$.

A. $x = 1$

B. $x = -1$

C. $x = 2$

D. $x = 3$

Q33 Quel est l'ensemble des solutions de $\ln(x-2) = \ln(2-x)$?

A. $\emptyset$

B. $] -\infty, 2[$

C. $]2, +\infty[$

D. $\{2\}$

Q34 Résoudre $\ln(x^2 - 1) = \ln(2x + 2)$.

A. $x = -1$ ou $x = 3$

B. $x = 3$

C. $x = -1$

D. $x = 1$

Q35 Quel est l'ensemble des solutions de $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$?

A. $\{e^{-1}, e^2\}$

B. $\{-1, 2\}$

C. $\{e, e^{-2}\}$

D. $\{e^2\}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 08 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Inéquations logarithmiques

Comparer les arguments et respecter le domaine.

Q36 Résoudre $\ln x \leq 0$.

- A.** $] -\infty, 1]$ **B.** $]0, 1]$
C. $[1, +\infty[$ **D.** $]0, 1[$

Q37 Résoudre $\ln(2x - 1) > \ln 3$.

- A.** $] -\infty, 2[$ **B.** $]1/2, 2[$
C. $[2, +\infty[$ **D.** $]2, +\infty[$

Q38 Résoudre $\ln(x - 1) \leq \ln(5 - x)$.

- A.** $] -\infty, 3]$ **B.** $[1, 3]$
C. $]1, 3]$ **D.** $[3, 5[$

Q39 Résoudre $\ln(x^2) < 0$.

- A.** $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
B. $] -1, 0[\cup]0, 1[$
C. $] -1, 1[$
D. $]0, 1[$

Q40 Pour $x > 0$, résoudre $\frac{\ln x}{\ln(1/2)} \geq 2$.

- A.** $[4, +\infty[$ **B.** $]0, 1/4]$
C. $[1/4, +\infty[$ **D.** $]0, 2]$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 09 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Limites aux bornes

Identifier la limite de l'argument avant de conclure.

Q41 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

A. $+\infty$

B. 1

C. 0

D. $-\infty$

Q42 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$.

A. $+\infty$

B. 1

C. 0

D. $-\infty$

Q43 Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2)$.

A. $\ln 2$

B. $+\infty$

C. $-\infty$

D. 0

Q44 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$.

A. 2

B. $+\infty$

C. $\ln 2$

D. 0

Q45 Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x}$.

A. $+\infty$

B. 1

C. 0

D. $-\infty$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 10 / 18 · APPROFONDISSEMENT

Croissances comparées

Reconnaître une limite usuelle ou une forme à transformer.

Q46 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

A. 0

B. $-\infty$

C. 1

D. $+\infty$

Q47 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

A. 1

B. $+\infty$

C. 0

D. $-\infty$

Q48 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

A. $+\infty$

B. 0

C. -1

D. 1

Q49 Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

A. 1

B. -1

C. 0

D. $+\infty$

Q50 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - \ln x]$.

A. 1

B. $-\infty$

C. 0

D. $+\infty$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 11 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Dérivées usuelles

Combiner les règles de dérivation.

Q51 Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de $f(x) = \ln x$ est :

A. $f'(x) = 1/x$

B. $f'(x) = \ln x/x$

C. $f'(x) = x$

D. $f'(x) = 1/\ln x$

Q52 Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de $f(x) = x \ln x$ est :

A. $f'(x) = x + \ln x$

B. $f'(x) = 1$

C. $f'(x) = \ln x$

D. $f'(x) = \ln x + 1$

Q53 Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est :

A. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

B. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

C. $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

D. $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

Q54 Sur $]0, +\infty[$, la dérivée de $f(x) = (\ln x)^2$ est :

A. $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

B. $f'(x) = 2 \ln x$

C. $f'(x) = \frac{2}{x}$

D. $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

Q55 Sur $]1, +\infty[$, la dérivée de $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ est :

A. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

B. $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

C. $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

D. $f'(x) = -\frac{1}{\ln x}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 12 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Dérivées de compositions

Repérer la forme $u \mapsto \ln u$.

Q56 Pour $x > -3/2$, la dérivée de $f(x) = \ln(2x + 3)$ est :

A. $f'(x) = \frac{1}{2x+3}$

B. $f'(x) = \frac{2}{x}$

C. $f'(x) = \frac{2}{2x+3}$

D. $f'(x) = 2 \ln(2x + 3)$

Q57 Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est :

A. $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

B. $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

C. $f'(x) = \frac{2}{x}$

D. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Q58 Pour $x > 1$, la dérivée de $f(x) = \ln(\ln x)$ est :

A. $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

B. $f'(x) = \frac{1}{\ln x}$

C. $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$

D. $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Q59 Pour $x > 1$, la dérivée de $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est :

A. $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$

B. $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$

C. $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

D. $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

Q60 Pour $x > 0$, la dérivée de $f(x) = \ln \sqrt{x}$ est :

A. $f'(x) = \frac{1}{x}$

B. $f'(x) = \frac{1}{2x}$

C. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

D. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 13 / 18 · APPROFONDISSEMENT

Variations et extrema

Relier le signe de la dérivée aux variations.

Q61 Sur $]0, +\infty[$, le minimum de $f(x) = x - \ln x$ vaut :

- A. 0, atteint en $x = 1$
- B. 1, atteint en $x = 1$
- C. -1 , atteint en $x = 1$
- D. $e - 1$, atteint en $x = e$

Q62 Sur $]0, +\infty[$, le maximum de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ vaut :

- A. e , atteint en $x = e$
- B. 0, atteint en $x = 1$
- C. $1/e$, atteint en $x = e$
- D. 1, atteint en $x = e$

Q63 Sur $]0, +\infty[$, le minimum de $f(x) = x \ln x$ vaut :

- A. 0, atteint en $x = 1$
- B. $-e$, atteint en $x = e$
- C. $-1/e$, atteint en $x = 1/e$
- D. $1/e$, atteint en $x = 1/e$

Q64 La fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est :

- A. Croissante sur $\mathbb{R}$
- B. Décroissante sur $\mathbb{R}$
- C. Croissante sur $] - \infty, 0]$, puis décroissante sur $[0, +\infty[$
- D. Décroissante sur $] - \infty, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$

Q65 Sur $]1, +\infty[$, la fonction $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ est :

- A. Strictement croissante
- B. Constante
- C. D'abord croissante, puis décroissante
- D. Strictement décroissante

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 14 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Tangentes et asymptotes

Passer du calcul à l'interprétation géométrique.

Q66 La tangente à $y = \ln x$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

A. $y = x$

B. $y = x + 1$

C. $y = x - 1$

D. $y = 1 - x$

Q67 La tangente à $y = \ln x$ au point d'abscisse e a pour équation :

A. $y = x - e + 1$

B. $y = x/e$

C. $y = x/e + 1$

D. $y = ex$

Q68 Quelle droite est une asymptote verticale à la courbe de $f(x) = \ln(x - 2)$?

A. $x = 0$

B. $x = 2$

C. $y = 0$

D. $y = 2$

Q69 À $+\infty$, la courbe de $f(x) = \ln(1 + 1/x)$ admet l'asymptote :

A. $y = 0$

B. $x = 0$

C. $y = 1$

D. $y = x$

Q70 Pour $a > 0$, la tangente à $y = \ln x$ en a est parallèle à $y = 2x + 3$ si :

A. $a = 1$

B. $a = 1/2$

C. $a = e^2$

D. $a = 2$

Score : _____ / 5

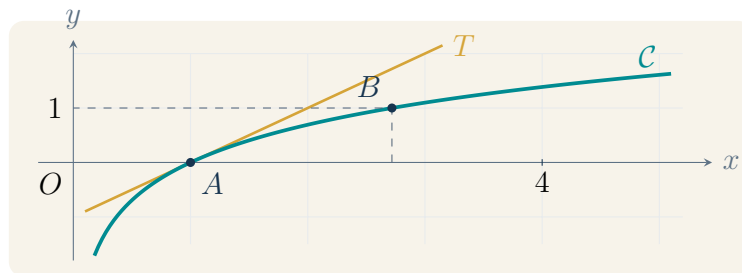
À revoir : _____

SÉRIE 15 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Lire un graphique

Lire une courbe, une tangente et leurs positions relatives.

Q71 La figure commune à cette série représente $\mathcal{C} : y = \ln x$ et sa tangente T en A . Quelle est l'abscisse de A ?



- A.** 0
- B.** e
- C.** 1
- D.** 2

Q72 Le point B de la figure a pour ordonnée 1. Son abscisse vaut :

- A.** $1/e$
- B.** e
- C.** 0
- D.** 1

Q73 Le coefficient directeur de la tangente T vaut :

- A.** 1
- B.** 0
- C.** e
- D.** -1

Q74 Pour $x > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est située :

- A.** Au-dessus de T , avec un seul point commun en A
- B.** Sur T pour tout $x > 0$
- C.** Sous T seulement pour $x > 1$
- D.** Sous T , avec un seul point commun en A

Q75 D'après la courbe, l'ensemble des solutions de $0 \leq \ln x \leq 1$ est :

- A.** $]0, e]$
- B.** $[0, 1]$
- C.** $[1, e]$
- D.** $[1, +\infty[$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 16 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Primitives avec logarithme

Reconnaître $1/x$ et u'/u .

Q76 Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $f(x) = 1/x$ est :

A. $F(x) = \ln x$

B. $F(x) = x^2/2$

C. $F(x) = x \ln x$

D. $F(x) = -1/x$

Q77 Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $f(x) = 2/x$ est :

A. $F(x) = \ln(2x)$

B. $F(x) = -2/x$

C. $F(x) = (\ln x)^2$

D. $F(x) = 2 \ln x$

Q78 Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ est :

A. $F(x) = \ln(x^2 + 1)$

B. $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1)$

C. $F(x) = \ln(x^2 + 1)/2$

D. $F(x) = 1/(x^2 + 1)$

Q79 Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $f(x) = \ln x$ est :

A. $F(x) = x \ln x - x$

B. $F(x) = x \ln x$

C. $F(x) = 1/x$

D. $F(x) = (\ln x)^2/2$

Q80 Sur $] -\infty, 0[$, une primitive de $f(x) = 1/x$ est :

A. $F(x) = x \ln(-x)$

B. $F(x) = \ln(-x)$

C. $F(x) = -\ln(-x)$

D. $F(x) = \ln x$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 17 / 18 · ENTRAÎNEMENT

Logarithme décimal

Changer de base et interpréter une échelle logarithmique.

Q81 Pour $x > 0$, on définit $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Calculer $\log 1000$.

A. 3

B. 10

C. $\ln 1000$

D. 100

Q82 Calculer $\log 0,01$.

A. 2

B. $1/100$

C. -1

D. -2

Q83 Résoudre $\log x = \frac{1}{2}$.

A. $x = 10$

B. $x = 100$

C. $x = \sqrt{10}$

D. $x = 5$

Q84 Pour $x > 0$, la dérivée de $f(x) = \log x$ est :

A. $f'(x) = \frac{1}{x}$

B. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

C. $f'(x) = \frac{\ln 10}{x}$

D. $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Q85 Un indice est défini par $L = 10 \log(I/I_0)$, avec $I, I_0 > 0$. Si I est multiplié par 100, alors L :

A. Est multiplié par 100

B. Augmente de 20

C. Augmente de 100

D. Augmente de 2

Score : _____ / 5

À revoir : _____

SÉRIE 18 / 18 · APPROFONDISSEMENT

Synthèse et pièges

Associer plusieurs idées dans un même raisonnement.

Q86 Combien l'équation $\ln x = x - 1$ possède-t-elle de solutions réelles ?

- A. Une seule : $x = 1$
- B. Deux : $x = 1$ et $x = e$
- C. Une infinité
- D. Aucune

Q87 Pour quel réel m l'équation $\ln x = m$ admet-elle une solution dans $]0, 1[$?

- A. $m = 0$
- B. $m > 0$
- C. $m \geq 0$
- D. $m < 0$

Q88 Pour $m \in \mathbb{R}$, combien l'équation $\ln(x^2 + 1) = m$ admet-elle de solutions lorsque $m > 0$?

- A. Une seule solution
- B. Aucune solution
- C. Une infinité de solutions
- D. Deux solutions opposées

Q89 Combien l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2e}$ admet-elle de solutions sur $]0, +\infty[$?

- A. Trois solutions
- B. Deux solutions
- C. Une seule solution
- D. Aucune solution

Q90 Pour quels $a > 0$ la tangente à $y = \ln x$ au point d'abscisse a passe-t-elle par l'origine ?

- A. $a = 2$
- B. $a = 1$
- C. $a = 1/e$
- D. $a = e$

Score : _____ / 5

À revoir : _____

AUTOÉVALUATION

Grille des réponses

Une seule réponse correcte par question. Corriger d'abord, puis lire la justification.

Série	Question : réponse				
01	1 : B	2 : D	3 : B	4 : B	5 : C
02	6 : C	7 : D	8 : C	9 : A	10 : A
03	11 : B	12 : D	13 : D	14 : B	15 : C
04	16 : A	17 : A	18 : C	19 : C	20 : C
05	21 : C	22 : B	23 : D	24 : D	25 : A
06	26 : B	27 : A	28 : D	29 : C	30 : D
07	31 : C	32 : A	33 : A	34 : B	35 : A
08	36 : B	37 : D	38 : C	39 : B	40 : B
09	41 : D	42 : A	43 : C	44 : C	45 : A
10	46 : A	47 : C	48 : D	49 : A	50 : C
11	51 : A	52 : D	53 : A	54 : D	55 : B
12	56 : C	57 : D	58 : D	59 : B	60 : B
13	61 : B	62 : C	63 : C	64 : D	65 : D
14	66 : C	67 : B	68 : B	69 : A	70 : B
15	71 : C	72 : B	73 : A	74 : D	75 : C
16	76 : A	77 : D	78 : A	79 : A	80 : B
17	81 : A	82 : D	83 : C	84 : B	85 : B
18	86 : A	87 : D	88 : D	89 : B	90 : D

Transformer une erreur en méthode

Noter le numéro de la question, identifier l'erreur et refaire le calcul sans regarder le corrigé.

Score total : _____ / 90

Date : _____

CORRIGÉS COURTS

Questions 1 à 12

Q1 Réponse B. $\ln 1 = 0$: c'est une valeur de référence.

Q2 Réponse D. $\ln(e^3) = 3 \ln e = 3$.

Q3 Réponse B. $\ln(1/e^2) = -\ln(e^2) = -2$.

Q4 Réponse B. $\sqrt{e} = e^{1/2}$, donc $\ln \sqrt{e} = 1/2$.

Q5 Réponse C. Le logarithme transforme un produit de nombres positifs en somme.

Q6 Réponse C. Il faut $2x - 6 > 0$, soit $x > 3$.

Q7 Réponse D. $x^2 - 4 > 0$ équivaut à $x < -2$ ou $x > 2$.

Q8 Réponse C. Le quotient doit être strictement positif : numérateur et dénominateur ont le même signe.

Q9 Réponse A. Il faut $x > 0$ et $\ln x \neq 0$, donc $x \neq 1$.

Q10 Réponse A. Il faut $\ln x > 0$, ce qui équivaut à $x > 1$.

Q11 Réponse B. $\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \times 5) = \ln 10$.

Q12 Réponse D. $\ln 12 - \ln 3 = \ln(12/3) = \ln 4$.

CORRIGÉS COURTS

Questions 13 à 24

Q13 Réponse D. $\ln 9 = \ln(3^2) = 2 \ln 3$ et $\ln 3 \neq 0$.

Q14 Réponse B. $x^2 = |x|^2$ et $|x| > 0$. La valeur absolue permet aussi de traiter $x < 0$.

Q15 Réponse C. On sépare le quotient, puis on fait descendre les exposants.

Q16 Réponse A. $\ln(1/x) = -\ln x$: les deux termes s'annulent.

Q17 Réponse A. $\ln(\sqrt{x}/x) = \frac{1}{2} \ln x - \ln x = -\frac{1}{2} \ln x$.

Q18 Réponse C. Les deux arguments sont positifs et $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$.

Q19 Réponse C. On transforme la différence en logarithme d'un quotient, puis on utilise la racine carrée.

Q20 Réponse C. $\ln 8 = 3 \ln 2$ et $\ln e = 1$. Il reste donc 1.

Q21 Réponse C. $0 < 2/3 < 1$, donc $\ln(2/3) < 0$.

Q22 Réponse B. $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Q23 Réponse D. On compare à $\ln 1 = 0$: $\ln x > \ln 1$ équivaut à $x > 1$.

Q24 Réponse D. $1 < 2 < 3$ et $\ln$ conserve l'ordre.

CORRIGÉS COURTS

Questions 25 à 36

Q25 Réponse A. Le produit est positif lorsque les deux facteurs ont le même signe : $0 < x < 1$ ou $x > 2$.

Q26 Réponse B. $\ln(e^2) = 2$. La stricte croissance assure l'unicité.

Q27 Réponse A. $\ln(3x - 2) = \ln 1$ donne $3x - 2 = 1$, donc $x = 1$.

Q28 Réponse D. Le domaine est $]0, 5[$. Puis $x = 5 - x$ donne $x = 5/2$.

Q29 Réponse C. On a $x \neq 0$ et $x^2 = 1$, d'où $x = \pm 1$.

Q30 Réponse D. Pour $x > 0$, $\ln(x^2) = \ln 9$ donne $x^2 = 9$. Seule la valeur 3 est admise.

Q31 Réponse C. Le domaine impose $x > 1$. L'équation devient $x^2 - 1 = 8$, donc $x = 3$.

Q32 Réponse A. Pour $x > 0$, $(x + 2)/x = 3$, donc $x + 2 = 3x$ et $x = 1$.

Q33 Réponse A. Il faudrait à la fois $x > 2$ et $x < 2$. Le domaine commun est vide.

Q34 Réponse B. Le domaine commun est $x > 1$. Puis $x^2 - 2x - 3 = 0$ donne -1 et 3 ; seule 3 convient.

Q35 Réponse A. Poser $t = \ln x$: $(t - 2)(t + 1) = 0$. Donc $\ln x = 2$ ou -1 .

Q36 Réponse B. Le domaine est $x > 0$; la croissance donne $x \leq 1$.

CORRIGÉS COURTS

Questions 37 à 48

Q37 Réponse D. Il faut $x > 1/2$. Puis $2x - 1 > 3$, donc $x > 2$.

Q38 Réponse C. Le domaine est $]1, 5[$. L'inégalité devient $x - 1 \leq 5 - x$, soit $x \leq 3$.

Q39 Réponse B. $\ln(x^2) < 0$ équivaut à $0 < x^2 < 1$. Il faut exclure $x = 0$.

Q40 Réponse B. $\ln(1/2) < 0$: le sens s'inverse. On obtient $\ln x \leq \ln(1/4)$, donc $x \leq 1/4$.

Q41 Réponse D. C'est la limite usuelle de $\ln$ à la borne 0 de son domaine.

Q42 Réponse A. $\ln x$ tend vers $+\infty$, même si sa croissance est lente.

Q43 Réponse C. $x - 2 \rightarrow 0^+$; on applique $\ln t \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow 0^+$.

Q44 Réponse C. Le quotient tend vers $2 > 0$. Par continuité, sa composée par $\ln$ tend vers $\ln 2$.

Q45 Réponse A. Lorsque $x \rightarrow 1^+$, $\ln x \rightarrow 0^+$. Son inverse tend vers $+\infty$.

Q46 Réponse A. À l'infini, x croît plus vite que $\ln x$.

Q47 Réponse C. Poser $t = 1/x$: $x \ln x = -(\ln t)/t \rightarrow 0$.

Q48 Réponse D. C'est le taux d'accroissement de $\ln$ en 1 : la limite vaut $\ln'(1) = 1$.

CORRIGÉS COURTS

Questions 49 à 60

Q49 Réponse A. $\ln 1 = 0$: le quotient est le taux d'accroissement de $\ln$ en 1.

Q50 Réponse C. La différence vaut $\ln(1 + 1/x)$ et tend vers $\ln 1 = 0$.

Q51 Réponse A. C'est la formule de base : $(\ln x)' = 1/x$.

Q52 Réponse D. Par la règle du produit : $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times (1/x)$.

Q53 Réponse A. La règle du quotient donne $f'(x) = [(1/x)x - \ln x]/x^2$.

Q54 Réponse D. On utilise $(u^2)' = 2uu'$ avec $u = \ln x$.

Q55 Réponse B. On applique $(1/u)' = -u'/u^2$ avec $u = \ln x$.

Q56 Réponse C. La dérivée intérieure vaut 2 : $(\ln u)' = u'/u$.

Q57 Réponse D. Prendre $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$.

Q58 Réponse D. Prendre $u = \ln x$: $u'/u = (1/x)/\ln x$.

Q59 Réponse B. Écrire $f = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$, puis $f' = 1/(x + 1) - 1/(x - 1)$.

Q60 Réponse B. $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$, donc $f'(x) = 1/(2x)$.

CORRIGÉS COURTS

Questions 61 à 72

Q61 Réponse B. $f'(x) = (x - 1)/x$: f décroît puis croît. Son minimum est $f(1) = 1$.

Q62 Réponse C. $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$ change de $+$ à $-$ en e . On a $f(e) = 1/e$.

Q63 Réponse C. $f'(x) = \ln x + 1$ s'annule en $1/e$ et passe de $-$ à $+$. Puis $f(1/e) = -1/e$.

Q64 Réponse D. $f'(x) = 2x/(x^2 + 1)$ a le signe de x .

Q65 Réponse D. $f'(x) = -1/[x(\ln x)^2] < 0$ sur tout l'intervalle.

Q66 Réponse C. $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 0 + 1(x - 1)$.

Q67 Réponse B. $y = 1 + (x - e)/e = x/e$.

Q68 Réponse B. Lorsque $x \rightarrow 2^+$, $\ln(x - 2) \rightarrow -\infty$.

Q69 Réponse A. $\ln(1 + 1/x) \rightarrow 0$: l'asymptote à $+\infty$ est horizontale.

Q70 Réponse B. Les coefficients directeurs doivent être égaux : $1/a = 2$, d'où $a = 1/2$.

Q71 Réponse C. A est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses : $\ln 1 = 0$.

Q72 Réponse B. $\ln x = 1$ donne $x = e$.

CORRIGÉS COURTS

Questions 73 à 84

Q73 Réponse A. T est la tangente en $x = 1$ et $\ln'(1) = 1$.

Q74 Réponse D. La fonction $x - 1 - \ln x$ a pour minimum 0 en 1. Donc $\ln x \leq x - 1$.

Q75 Réponse C. La fonction est croissante : $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$ équivaut à $1 \leq x \leq e$.

Q76 Réponse A. On vérifie directement : $(\ln x)' = 1/x$.

Q77 Réponse D. La constante multiplicative se conserve : $(2 \ln x)' = 2/x$.

Q78 Réponse A. On reconnaît u'/u avec $u = x^2 + 1 > 0$.

Q79 Réponse A. On dérive la proposition : $(x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Q80 Réponse B. Pour $x < 0$, $-x > 0$ et $(\ln(-x))' = (-1)/(-x) = 1/x$.

Q81 Réponse A. $1000 = 10^3$, donc $\log 1000 = 3$.

Q82 Réponse D. $0,01 = 10^{-2}$, donc $\log 0,01 = -2$.

Q83 Réponse C. $x = 10^{1/2} = \sqrt{10}$.

Q84 Réponse B. $\log x = (\ln x)/\ln 10$: le facteur $1/\ln 10$ est constant.

CORRIGÉS COURTS

Questions 85 à 90

Q85 Réponse B. $L_{\text{nouveau}} - L = 10 \log 100 = 20$.

Q86 Réponse A. $g(x) = x - 1 - \ln x$ décroît puis croît et son minimum vaut $g(1) = 0$.

Q87 Réponse D. $\ln$ est continue, strictement croissante et envoie $]0, 1[$ sur $] - \infty, 0[$.

Q88 Réponse D. $x^2 = e^m - 1 > 0$, donc $x = \pm \sqrt{e^m - 1}$.

Q89 Réponse B. $f = \ln x / x$ croît de 0 à $1/e$ sur $[1, e]$, puis décroît vers 0. Il y a une solution de chaque côté de e .

Q90 Réponse D. La tangente est $y = x/a + \ln a - 1$. Elle passe par $(0, 0)$ si $\ln a - 1 = 0$, donc $a = e$.

Avant de tourner la page

- Je commence par le domaine : chaque argument de logarithme est positif.
- Je sais transformer les produits, quotients et puissances.
- Je contrôle les solutions après une équation ou une inéquation.
- Je reconnais les limites usuelles et la dérivée u'/u .
- Je peux justifier une variation, une tangente et une primitive.

Mon bilan

Séries à reprendre : _____

Une erreur à ne plus refaire : _____