

Exercice 1 :

1) Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_0 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i); \quad z_1 = (1 + i\sqrt{3})^3; \quad z_2 = \frac{2 + i}{3 + 4i} - \frac{3 - 4i}{2 - i}; \quad z_3 = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$$

2) Mettre sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$$z_4 = (3 + i\sqrt{3})^4; \quad z_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}; \quad z_6 = \frac{\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}}; \quad z_7 = \frac{(1 + i)}{(1 - i\sqrt{3})} e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad z_8 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$$

3) Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$A = \frac{(1 + i)^4}{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}; \quad B = \frac{(\sqrt{3} + i)^9(1 - i)}{(1 + i)^2}; \quad C = -3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right); \quad D = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 2 :

I. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère les nombres suivants :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 11 + (11\sqrt{3} - 2)i}{2 + 11i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 2i}{3 - i}$$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis déterminer le module et un argument pour chacun.

2) On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

a) Ecrire Z sous forme trigonométrique puis algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = 2$.

II. On considère le nombre complexe $z = (1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1) Calculer z^2 sous forme algébrique.

2) Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z .

3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

III. a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité sous formes trigonométrique et algébrique.

b) Calculer $(1 - i)^6$. En déduire les racines sixièmes du nombre $8i$ sous forme trigonométrique.

IV. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3 = 8i$; b) $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; c) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$; d) $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$.

V. Déterminer les racines cubiques du nombre $Z = -i$ sous forme trigonométrique et algébrique. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $[(1 - i)z]^3 + i = 0$.

VI. Calculer $(1 - 2i)^4$. En déduire les racines quatrièmes de $-7 + 24i$.

VII. Linéariser les expressions suivantes :

$$\cos^5 x; \quad \sin^5 x; \quad \cos^3 x; \quad \sin^3 x; \quad \cos^2 x \sin^3 x; \quad \cos x \cdot \sin^4 x; \quad \sin 3x \cdot \cos^2 x$$

Exercice 3 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2i$.

1) dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\frac{z-1}{z-2i} = i$ On appelle E le point image de la solution dans le plan complexe.

b) $\frac{z-1}{z-2i} = -1$ On appelle F le point image de la solution dans le plan complexe.

2) On pose le nombre complexe $Z = \frac{z-1}{z-2i}$ avec $Z = X + iY$ et $z = x + iy$, X, Y, x et y des réels.

Déterminer X et Y en fonction de x et y .

3) Déterminer et représenter l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.

4) Déterminer et représenter l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

5) Vérifier que F appartient à (D) et E appartient à (C) .

6) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|Z| = 1$.

Exercice 4 :

Les points A, B, M , et M' du plan complexe ont pour affixes respectives $2+4i; -i; z$; et z' .

On pose $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$ avec $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$.

1) Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' en fonction de celles $(x; y)$ du point M .

2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel

b) z' soit imaginaire pur

3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifier que $ZZ' = -3+4i$ puis calculer $|ZZ'|$.

4) Déterminer et représenter l'ensemble décrit par les points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon r . Déterminer r pour que M et M' soit sur un même cercle.

Exercice 5 :

I. On considère l'équation $(E): z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1 = 0$.

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 .

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

II. On considère l'équation $(E): z^4 + (2 - i)z^3 + (5 - 2i)z^2 + (4 - 3i)z + 6 = 0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions imaginaires pures que l'on déterminera.

2) Acheter la résolution de (E) .

III. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5 + 8i)z^2 - (13 - 32i)z + 57 - 24i$.

1) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle.

2) Acheter la résolution de l'équation $f(z) = 0$. On notera z_A la solution réelle, z_B la solution non réelle dont la partie réelle est positive et z_C la troisième solution.

3) Soit les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . Placer ces points dans plan complexe.

4) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 6 :

I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- 1) $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$. 2) $z^2 + (1+i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3} = 0$. 3) $(1+i)z^6 - (2-i)z^3 - i = 0$
4) $(2+i)z^2 - (9+2i)z + 5(3+i) = 0$ 5) $2\bar{z} = i - 1$. 6) $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2) = 0$
7) $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$. 8) $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

II. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants :

- 1) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$ 4) $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$

III. On considère le polynôme à coefficients complexes : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

- 1) Calculer $f(2i)$.
2) Déterminer les réels a et b tels que $f(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

IV. 1) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$.

- 2) Dans le plan complexe ($O; \vec{u}; \vec{v}$), A et B sont les points ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 7 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.

I. On donne le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1-2i$.

- 1) Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$.
2) Déterminer les affixes des images respectives A' et B' par t des points A et B d'affixes respectives $3-i$ et 5 .

II. Trouver l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω d'affixe $i\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

III. On donne le point A d'affixe $2 + 2i$.

- 1) Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 3i$.
2) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport -3 .
3) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
4) Déterminer l'écriture complexe de la similitude s de centre A , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

IV. Soit F la transformation qui, au point $M(z)$, associe le point $M'(z')$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F dans chacun des cas suivants :

- a) $z' = 5z + 2i$ b) $z' = z + 1 + 3i$ c) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $z' = (-1 + i)z + 2$
e) $z' = -3z + 2 - i$ f) $z' = z + 2 - 3i$ g) $z' = (-\sqrt{3} - i)z - i$ h) $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)z - i + 1$

V. On donne les points $A(-2 + i)$, $B(1 + 2i)$ et $C(2 - i)$. On considère la similitude directe S de centre A telle que $S(B) = C$.

- a) Trouver l'écriture complexe de S .
b) Déterminer les éléments caractéristiques de S .