

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES

Forme Algébrique

1 Déterminer la forme algébrique de z dans chaque cas :

a) $z_1 = (1+i)(1-2i)$; $z_2 = (2i+1)(1+i)^2(3i)$

b) $z_1 = \frac{1-i}{2i}$; $z_2 = \frac{1+4i}{1+\sqrt{2}i}$; $z_3 = \frac{(3-2i)(5+i)}{5-i}$

c) $Z_1 = (z+2)(2z-i)$; $Z_2 = \frac{z+1+i}{z-2}$ avec $z = x + iy$

Soit deux nombres complexes $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

a) $Z_1 = z_1^2 - 2z_2$; $Z_2 = z_1 z_2^2$; $Z_3 = (z_1 - 3z_2)^3$

b) $Z_1 = \frac{z_1}{z_2}$; $Z_2 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$; $Z_3 = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$

3 1. Donner la forme algébrique de : i^0 ; i^1 ; i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^6 ; i^n

2. Calculer la somme $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2021}$ et $S' = \sum_{k=3}^{2022} i^k$

3. On pose $j = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$

4 Détermine le réel x pour que $z = (2x+i)(x-3)$ tels que : a) $z \in \mathbb{R}$ b) $z \in i\mathbb{R}$ c) $z = 5 - 5i$

Affixe d'un point

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i$; $-3i$; $4 + i$ et -2 .

- Placer les points A, B, C et D
- Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs

- $\vec{AB}$; $\vec{AC}$; $\vec{BC}$
- $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{BC}$

3) Déterminer l'affixe du point :

- I milieu du segment [AB]
- K pour que ACKB soit un parallélogramme
- E tel que $\vec{AE} = 3\vec{BC}$
- F tel que $\vec{BF} = 2\vec{BE} - \frac{1}{2}\vec{CF}$

Conjugué d'un nombre complexe

1) Trouver l'expression conjugué des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 3 - \frac{1}{2}i$; $z_3 = -5$; $z_4 = -3i$

2) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \frac{3+i}{5-7}$

- Vérifier que $z_1 = \bar{z}_2$ puis en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.
- Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

2 Soit le polynôme P définie dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

- Montrer que pour tout complexe z , $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.
- Vérifier que $1 + i$ est une racine de P et en déduire une autre racine de P .
- En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$5\bar{z} = 4 - i$; $(1+i)\bar{z} + 1 - i = 0$; $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$

Forme trigonométrique

Forme exponentielle

1 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -1 - i$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -7$; $z_4 = -5i$

b) $z_1 = (1 + i\sqrt{3})(-3 + 3i)$; $z_2 = \frac{1}{i}$; $z_3 = \frac{2-2i}{\sqrt{3}+i}$

c) $z_1 = (1+i)^5$; $z_2 = (4 - 4i\sqrt{3})^3$; $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^{12}$

d) $z_1 = -2ie^{\frac{i\pi}{4}}$; $z_2 = -3\sqrt{2}e^{-i\pi} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

e) $z_1 = \frac{(2-2i)^3}{\sqrt{3}+i}$; $z_2 = -\frac{2(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5})}{\left[2, \frac{\pi}{4}\right] \times e^{\frac{3\pi}{4}}}$

f) $z_1 = 4 \left(\sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}\right)$; $z_2 = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}\right)$

g) $z_3 = -\sqrt{2}(-\cos \omega + i \sin \omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$

h) $z_1 = -\sin 2a + 2i \cos^2 a$, $z_2 = 1 + i \tan a$, $a \in]0; \pi[$
En déduire la forme exponentielle dans chaque cas.

2 Déterminer le module et l'argument de chacun des nombres des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = (1+i)(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$; $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2i}$

b) $z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{13}$; $z_2 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{(1+i)^2}$

c) $z_1 = \sin \theta + i(1 + \cos \theta)$ $\theta \in [0; \pi[$;

d) $z_4 = 1 - e^{i\theta}$; $z_5 = 1 + e^{i\theta}$; $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$

e) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{8}} - i$; $z_2 = e^{\frac{i\pi}{5}} + i$; $z_3 = (1+i)e^{\frac{i\pi}{9}}$

f) $z_6 = \frac{z_4}{z_5}$; $z_7 = z_4 \times z_5$; $z_8 = \frac{e^{\frac{i\pi}{7}} - i}{1 + e^{\frac{i\pi}{7}}}$

g) $|(1+i\sqrt{3})z^2| = 4$ et $\arg[(1+i\sqrt{3})z^2] = \frac{7\pi}{12}$

3 Soit les complexes $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}$

1- Ecrire sous forme algébrique les complexes $Z = \frac{z_1}{z_2}$; $Z' = z_1 \times z_2$.

- 2- Ecrire sous forme trigonométrique Z et Z' .
 3- En utilisant les questions précédentes, en déduire les valeurs exactes de : $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\tan \frac{7\pi}{12}$.
 4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
 $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cos x + (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \sin x = 2\sqrt{2}$
 Placer les points images de ces solutions.

4 Complète le tableau ci-dessus

F. trigo			$4(\cos \frac{143\pi}{3} + i \sin \frac{143\pi}{3})$
F. algé	$125 - 125i$		
F. expo		$2e^{i\frac{135\pi}{6}}$	

Formule de Moivre - Formules d'Euler

Soit les complexes suivants :

$$Z = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{2025} \text{ et } Z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^{2024}$$

a- Ecrire sous forme trigonométrique les complexes

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

b- En utilisant la formule de Moivre, écrire Z et Z' sous forme algébrique.

c- Calcule: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{2026}$

2 En utilisant les formules d'Euler ; linéariser les expressions suivantes :

a) $\cos^3 x$; $\cos^4 x$; $\cos^5 x$

b) $\sin^5 x$; $\sin^3 2x$; $\sin^4 5x$

c) $\sin^2 x \times \cos^3 x$; $\sin^3 x \times \cos^3 x$; $\cos^4 x \sin x$

3 En utilisant la formule de Moivre et le binôme de Newton,

a) Ecrire $\cos(4x)$ en fonction de $\sin x$.

b) Ecrire $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

c) Ecrire $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

d) Ecrire $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

Racines n^{ième} d'un nombre complexe

1 a) Déterminer les racines carrées de : 1 ; $-2i$; i ; $-5 + 12i$; $-3 + 4i$ et $-8i$.

b) Déterminer les racines cubiques de 1 ; i ; -1 ; $-i$; $-2 + 2i$ et $-8i$.

c) Déterminer les racines cinquièmes de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

2 1) a) Déterminer les racines quatrième de 1 .
 b) Calcule $(4 - i)^4$ puis déduis les racines quatrième de $161 - 240i$.
 d) Résous dans $\mathbb{C}$.

$$(2iz)^4 = 161 - 240i; (2z - 1)^4 = (z - 2)^4$$

2) Calcule $(2 + i)^3$ et en déduis les racines cubiques de $2 + 11i$

3 Extrait du Devoir N°1 TSEXP 2019 LPHNS

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$, (E): $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $u^3 = 1$.
En déduire la forme algébrique de chacune des solutions.
- 2) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $D = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
- 3) Développer D^3 .
- 4) En prenant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$. Déterminer sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E)
- 5) Donner sous forme algébrique les racines de l'équation (E).
- 6) En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Equation du second degré - Système dans $\mathbb{C}$

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $\frac{iz}{z+i} = 1 + 2i$; $z^2 + z - 6 = 0$; $4z^2 + 4z + 1 = 0$
- b) $z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 = 3 - 4i$; $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$
- c) $z^2 - (1 - i)z - 18 + 13i = 0$;
- d) $z^2 + (1 + 6i)z + 1 + 23i = 0$
- e) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - (24 + 10i) = 0$
- f) $z^4 + z^2 + 1 = 0$;
- g) $(2iz + 3 - i)^2 + (4 + 3i)^2 = 0$;
- h) $(3iz - 5 + i)^2 + (z - i)^2 = 0$

1 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes ci-dessous :

$$\begin{cases} iz + (1 + 2i)z' = 3i \\ (3 + 4i)z + 2iz' = 1 + 2i \end{cases} \quad \begin{cases} iz + 2\bar{z}' = 3i \\ 4\bar{z} + 2iz' = 1 + i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 2 - i \\ (1 + i)z_1 + (2 - 3i)z_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2iz_1 - z_2 = \frac{4}{1-i} \\ z_1 + 2iz_2 = 3i \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 z_2 = 3i - 4 \\ z_1 + z_2 = 3 + 5i \end{cases}$$

2 On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :
 (E) : $z^3 - z^2 + (-1 + i)z - 2 - 2i = 0$.

- 1) Vérifier que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.
- 2) Déterminer les racines carrées de $\alpha = 8 - 6i$
- 3) En déduire la résolution de l'équation de (E).
- 4) Donne la forme trigonométrique des solutions de (E).

3 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 (E): $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0$

1. Montrer l'équation (E) admet une solution réelle A dont on précisera.
2. Déterminer les complexes a , b et c tels que (E) s'écrive sous la forme : $(z - A)(az^2 + bz + c) = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

4 Soit (E) une équation et z_0 une solution de (E). Résous (E) dans $\mathbb{C}$ les cas suivants :

a) (E): $z^3 - (8 - 3i)z^2 + (17 - 17i)z - 4 + 20i = 0$; $z_0 = 1 - i$

b) (E): $2iz^3 - (26 + 14i)z^2 - (26 - 36i)z + 72 - 48i = 0; z_0 = 3i$

Configurations et Lieux Géométriques

1 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points :

$A(-5 + i); B(-3 + 4i); C(-2 - i)$ et $D(-8 + 3i)$

- Place ces points
- Calcule AB; BD et OC.
- Détermine $\text{mes}(\vec{u}, \vec{AB})$, $\text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC})$, $\text{mes}(\vec{CA}, \vec{CD})$.
- Donne la nature de chacun des triangles ABC et DBC ?
- Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ? Justifie. Que peux-tu dire des points C ; D et A ?

2 Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points A; B et C d'affixes respectifs : $1 + i; -3 - i; 2i$

- Placer ces points et déterminer la nature du triangle ABC.
- Déterminer le point D tel que ADBC soit un parallélogramme.
- Soit le point I milieu du segment [AB].
 - Trouver son affixe z_I .
 - Montrer que les points D, O et A sont alignés.
 - Montrer que les points A, D et B appartiennent au cercle (C_1) de centre I dont on précisera le rayon.
 - Montrer que les points A, D, B et C appartiennent au cercle (C_2) dont on précisera le centre et le rayon.

3 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $((O, I, J))$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2 + i; 2 - 2i$ et $-5 - 3i$. On donne $\theta = (\vec{AB}, \vec{AC})$ et I milieu de [BC]

- Donner une mesure de θ et l'affixe de I.
- Quelle est la nature des triangles ABC et ABI ?
- Faire une figure pour illustrer.
- On donne le point E telle que $z_E = -2 - 6i$. Montrer que les points A, B, C et E sont cocycliques et préciser les caractéristiques du cercle (Γ) auquel ils appartiennent. Quelle est la nature du triangle ICE ?
- Déterminer le point D pour que ACDB soit un parallélogramme. Montrer que $D \in (\Gamma)$.
- Calcule AB; AC et BC

4 On donne : $Z = \frac{z+3i}{z-1+i}$ où $z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$

- Ecrire Z sous forme algébrique avec x et y.
- Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tels que Z soit un réel.
- Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.
- Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.
- Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que $|Z| = 2$.

5 1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :

$$|z - 2i| = 3; |z + 3 + i| = |z - 1 - i|;$$

$$|\bar{z} - 1 + i| = 1; |iz + 2| = 3.$$

2) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :

- $|z - 3i| = |z + 2i|; |z| + 2z = -3 + 4i$
- $\arg(z + i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;$
- $\arg(\bar{z} + 2 - i) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
- $\arg(iz + 3 - i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi;$

Transformation du plan - Similitude

1 Soit une transformation du plan définie par une application complexe $f(z)$. Le point $M'(z')$ image du point $M(z)$ par f. Donner dans chaque cas :

- L'écriture complexe de f ;
- L'image du point $A(1 + 2i)$ par f.
- L'image de la droite (D): $y = x$.

- La translation (T) de vecteur $\vec{u}(-2; 1)$
- La symétrie (S_O) centrale de centre $\Omega_0(1 + i)$
- L'homothétie (H) de centre $\Omega_1(i)$ et de rapport $k = -2$.
- La rotation (R) de centre $\Omega_2(-1)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- La similitude directe (S) de centre $\Omega_3(2 + i)$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et de rapport $k = 2$.
- La symétrie orthogonale d'axe $x = 4$
- La symétrie orthogonale d'axe $y = 2$
- La similitude indirecte de centre $\Omega(1 + i)$; de rapport $k = 2$ et d'axe $y = 3$

2 Soit $A(-1), B(-2 + i), C(i)$ et $D(1 - 2i)$ des points du plan.

- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s telle que $S(A) = B$ et $S(C) = D$.
- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude qui laisse invariant A et transforme B en C. Déterminer l'image (D') de la droite d'équation $2x + y = 1$ et l'image du cercle (C) de centre B et de rayon $r = 3$.

3 Soit la transformation (T) définie par $z' = f(z)$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (T) tels que :

- $z' = 2z + 3 - i$ b) $z' = z + (1 - i\sqrt{2})i$
- $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)iz + 2i$ d) $z' = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})z + 3$
- $z' = iz + 2i$ f) $z' - 1 = (1 + i)^8 z$
- $z' = i\bar{z} + 1 - i$ g) $z' = -\bar{z} + 2i$ h) $z' = \bar{z} + 4$
- $z' = 2i\bar{z} + 4; z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z} + i\sqrt{3}$

4 Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $1, 2 + 2i$ et $1 - i$.

- Représenter A, B et C.
- Déterminer le module et l'argument de $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$. En déduire la nature du triangle OBC.
- Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
- Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe D.
- Quelle est la nature de OCDB ?