

Exercices d'entraînement

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSExp

2025 - 2026

Nombres Complexes

Exercice 1

Détermine un réel α vérifiant :

$$1) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Mets sous algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$z_0 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i); z_1 = (1 + i\sqrt{3})^3; z_2 = (1 - 2i)^5; z_3 = (1 - i)^{14};$$

$$z_4 = (1 + i)^{13}; z_5 = \frac{2 + i}{3 + 4i} - \frac{3 - 4i}{2 - i}; z_6 = \frac{(1 - i)(2 + i)}{2i(-3 + i)}; z_7 = \frac{3 + 4i}{i}; z_8 = -3 + 4i - \frac{3 + 4i}{i}$$

$$z_9 = -3 + 4i + \frac{-1 + 4i}{(2 - 3i)(-1 + 2i)}; z_{10} = \sum_{k=7}^{2000} i^k; z_{11} = \sum_{k=5}^{2002} (-i)^k$$

2. On donne $z = 2 + i\sqrt{2}$ et $z' = -2 + i$. Ecrire sous forme algébrique les complexes :

$$z_0 = z - \bar{z}'; z_1 = z\bar{z}; z_2 = z^2; z_3 = z'^3; z_4 = z'^5; z_5 = \bar{z}'^4; z_6 = \frac{z}{z'}; z_7 = -3z'^3 \times \frac{z}{z'}$$

3. Montrer que $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = 1$.

4. Soit $z_1 = \frac{3+2i}{5-7i}$ et $z_2 = \frac{3-2i}{5+7i}$.

Démontre, sans calcul, que $z_1 - z_2$ est un nombre réel et $z_1 + z_2$ un nombre imaginaire pur

Exercice 3

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe défini par : $z = (x - ix)(3 + 2ix)$

- 1) Ecris z sous forme algébrique.
- 2) Pour quelle(s) valeur(s) de x :
 - a) le nombre complexe z est réel ?
 - b) le nombre complexe z est imaginaire pur ?
 - c) le nombre complexe z est nul ?

Exercice 4

Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexes z dans les cas suivant :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad z_2 = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad z_3 = (-1 + i\sqrt{3})^8; \quad z_4 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^3}$$

$$z_5 = \frac{(\sqrt{3} + i)^9 (1 - i)}{(1 + i)^2}; \quad z_6 = -3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right); \quad z_7 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_8 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right); \quad z_9 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right); \quad z_{10} = -5e^{i\frac{\pi}{5}}$$

Exercice 5

on pose $a = 1 - i$; $b = -1 - i\sqrt{3}$; $c = ab$; $d = \frac{a}{b}$; $e = a^8$; $f = \frac{a^3}{b^2}$.

- 1) Donne le module et un argument de a et b .
- 2) Donne le module et un argument de c, d, e , et f .

Exercice 6

Complète le tableau suivant :

Nombre complexe	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme Exponentielle
z_A	$-3 + i\sqrt{3}$		
z_B		$\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$	
z_C			$5e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 7

A. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta; \quad z_2 = 2 \cos \theta - 2i \sin \theta; \quad z_3 = -\cos 5\theta + i \sin 5\theta; \quad z_4 = -\cos \theta - i \sin \theta$$

$$z_5 = -\sin \theta + i \cos \theta; \quad z_6 = \sin \theta + i \cos \theta; \quad z_7 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$$

$$z_8 = 1 + i \tan \theta \text{ avec } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}; \quad z_9 = i + \tan \theta \text{ avec } \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

A. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - e^{i\alpha}; \quad z_2 = 1 + e^{i\alpha}; \quad z_3 = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad z_4 = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha} \text{ où } \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

B. Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$a) \begin{cases} |z| = 5 \\ \text{Arg}((-1+i)z) = \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad b) \begin{cases} |z| \times |2i| = 6 \\ \text{Arg}\left(\frac{(1+i\sqrt{3})}{z}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Exercice 8

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

- Détermine le module et un argument de z_1 et z_2 .
- Ecris sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le quotient $\frac{z_2}{z_1}$.
- Déduis en les valeurs de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$ puis $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 9

Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$

- Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\frac{z_2}{z_1}$; $z_1 \times z_2$
- En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 10

Soit les complexes suivants $Z_1 = 1$; $Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $Z_3 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$

- Donner l'écriture trigonométrique des complexes $Z_2 - Z_1$ et $Z_3 - Z_1$
- Donner l'écriture trigonométrique et algébrique de $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1}$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ puis $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 11 (Corrigé dans DONI MATHS TSEXP)

A. Soient z et u deux nombres complexes tels que :

$$z = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad u = \sqrt{2}(1 + i)$$

On pose : $X = u \times z^2$

- Détermine le module et l'argument principal de z et u .
 - Déduis en le module et l'argument principal de X .
- Ecris X sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
 - Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
 - Calcule X^{12} .

Exercice 12

- Détermine la forme algébrique de : $A = (1 + i)^{2025}$; $B = (\sqrt{3} - i)^{2026}$; $B = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{20}$.
- Exprime $\cos 5x$, $\sin 5x$, $\cos 4x$, $\sin 4x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
- Linéarise : $\cos^3(2x)$; $\sin^5\left(\frac{2}{3}x\right)$; $\cos^3 x \times \sin^3 x$; $\cos^3\left(\frac{13}{3}x\right) \times \sin^3\left(\frac{13}{3}x\right)$; $256 \cos^3 x \times \sin^5 x$; $32 \cos^3(2x) \times \sin^2(5x)$; $\cos 5x \sin(3x)$.

Exercice 13

- A. Détermine sous forme algébrique les racines 4^{ème} de l'unité. Place les points images de ces racines sur le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
- B. Détermine sous forme algébrique les racines 6^{ème} de l'unité. Place les points images de ces racines sur le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
- C. Détermine les racines 5^{ème} de l'unité. Place les points image de ces racines sur le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
- D. Déterminer les racines cubiques de $Z = 4\sqrt{2}(1 + i)$
- E. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
- a) $z^3 = 8i$ b) $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; c) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$; d) $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$

Exercice 14

On pose : $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ et $u = z^2$.

- Calculer u puis déterminer son module et ses arguments.
- En déduire de ce qui précède le module et un argument z .
- Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12}$.
- On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sin x = 1$
Résous cette équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15

On pose : $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

- Calculer z^2 puis déterminer son module et ses arguments.
- En déduire de ce qui précède le module et un argument z .
- Déduis en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$.
- On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x - \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sin x + \sqrt{2} = 0$
Résous cette équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Soit z et Z les nombres complexes définis par : $z = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ et $Z = z^4$.
Détermine les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

Exercice 17

- I. On donne $z = 2 + 11i$ et $t = 2 + i$.
- Vérifier que $t^3 = z$; (on dit alors que t est une racine cubique de z)
 - Déterminer les racines cubiques de 1.
 - En déduire alors les racines cubiques de z sous forme algébrique.

II.

- Vérifier que $(2 + i)^4 = -7 + 24i$.
- Trouver les racines quatrièmes de l'unité.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 7 - 24i = 0$

Exercice 18

Dans le plan complexe on donne les points A , B et C d'affixes respectives :

$3 + i$, $-2 - i$ et $-1 + 4i$.

- Place dans le plan complexe les points A , B et C .
- Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- Calcule l'affixe du milieu M du segment $[AB]$.
- Calcule l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC .

Calcule l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 19

On considère le polynôme f défini par :

$$f(z) = iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i; \quad z \in \mathbb{C}$$

- Montre que f admet une racine imaginaire pure z_0 à déterminer.
- Détermine les nombres complexes a , b et c tels que :

$$f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$$
- Résous l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 la racine non imaginaire pur ayant la plus grande partie réelle et z_2 la troisième.
- Dans le plan rapporté au repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé (unité graphique : 3cm), on considère les points M , A et L d'affixes respectives z_2 ; z_1 ; z_0 .
- Place les points M , A , L . (1 pt)
- Calcule MA , ML , AL et $MES(\widehat{MAL})$. Déduis en la nature du triangle MAL .
- Détermine z l'affixe du point I tel que le quadrilatère $MALI$ soit un parallélogramme. Place le point I .

Exercice 20

On considère le polynôme $P(z)$ suivant :

$$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$$

- Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1
- Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$.
- Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
- On note z_3 la 3^{ème} solution de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A , B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 sont alignés.

Exercice 21

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0 \quad (E)$$

- Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E) .
 - Détermine les réels a et b tels que pour tout complexe z

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$$
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.
 - Déduis-en les solutions de (E) sous formes algébrique et trigonométrique.

Exercice 22

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + (8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i$

- Démontre que $2i$ et -3 sont racines de P .
- Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - 2i)(z + 3)Q(z)$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 23

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1. Trouver les réels a et b tels que $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$
3. Placer dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$ les images $A; B; C; D$ des solutions de $f(z) = 0$; puis préciser que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 24

On considère le polynôme f défini par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :
 $f(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$ (0,75 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. (1 pt)
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'afixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}; z_B = -i\sqrt{3}; z_C = 3 - 2i\sqrt{3}; z_D = \bar{z}_C.$$

- a) Placer les points A, B, C, D . [la figure complète (1,5 pts)]
- b) Quelle est la nature du triangle ACD ? (0,5 pt)
- c) Montrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de (C) . (1,5 pts)
4. On note E le symétrique de C par rapport à O .

Préciser l'afixe de E et déterminer la nature du triangle BED . (0,75 pt)

Exercice 25

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E): z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0.$$

1°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (1pt)

2°/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. (1pt)

3°/ Achever la résolution dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation (E) .

(1pt) 4°/ En désignant par z_1 la solution non imaginaire pure qui a une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 la 4ème solution de (E) , montrer que z_0, z_1, z_2 et z_3 sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison. (1pt)

5°/ Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E) (1pt)

Exercice 26 : (Corrigé dans DONI MATHS TSEXP)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$(F): z^4 - 2z^3(1 + \sqrt{3}) + 2z^2(3 + 2\sqrt{3}) - 4z(2 + \sqrt{3}) + 8 = 0.$$

- 1) Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$ (c'est-à-dire que $\bar{z}_0$ est aussi solution de (F)).

- 2) Vérifier que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation.
- 3) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).
- 4) Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F). (Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1cm).
- 5) Déterminer la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calculer en cm^2 l'aire de sa surface.

Exercice 27 : Extrait du Bac 2013 T. S.Exp (Mali)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0 ; \quad z + \frac{1}{z} = 1 ; \quad z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

2. Soit le polynôme de la variable complexe z tel que :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

- a) Vérifier que pour tout z non nul on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$$

3. En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z) = 0$

Exercice 28

On considère le polynôme suivant : $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

- 6) Ecrire $1 + i$ sous forme trigonométrique.
- 7) Calculer $p(1 + i)$.
- 8) Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$
- 9) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation.
- 10) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.
- 11) Déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
- 12) Détermine les réels a, b, c et d tels que $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$

Exercice 29

A. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a) 3 \left(\frac{z - 3i}{z + 2} \right)^2 - 5i \left(\frac{z - 3i}{z + 2} \right) + 2 = 0 ; \quad b) z^6 - (1 + i)z^3 - i = 0$$

$$c) \frac{-2z - 1 + i}{z - i} = z ; \quad d) iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$$

B. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les équations suivantes :

$$a) \begin{cases} 5iz + (2 - i)z' = 1 + 12i \\ (2 - 3i)z + (5 - 2i)z' = 39 - 10i \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} 2iz + (1 - 3i)z' = 14 + 6i \\ (1 - i)\bar{z} + (5 - 2i)\bar{z}' = 4 - 18i \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} ; \quad d) \begin{cases} (1 + i)z + 2i\bar{z}' = 3 - i \\ 2z + 3\bar{z}' = 5 \end{cases}$$

Exercice 30

Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition proposée :

- a) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$; b) $|z - 3i| = 2$;
c) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$; d) $|\bar{z} + 1 + 2i| = |z - 4|$;

Exercice 31

Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que :

$$f(z) = z' = \frac{z - 2 + i}{z + 1 - i}$$

- Détermine les nombres complexes pour lesquels f est définie.
- On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Ecris z' sous forme algébrique

- Détermine et construis l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- (E_1) : z' soit un réel.
- (E_2) : z' soit un nombre imaginaire pur.
- (E_3) : $|z'| = 1$.
- (E_3) : $|z'| = \frac{2}{3}$.

Exercice 32

Les considère les points $A(2 - 4i)$; $B(-i)$; $M(z)$ et $M'(z')$ avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i} ; \quad z \neq i$$

- Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .
- Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :
 - z' soit un réel.
 - z' soit un imaginaire pur.

Exercice 33

Pour chacune des transformations S suivantes, donner la nature et les éléments caractéristiques (le rapport, l'angle et le centre éventuel).

a) $z' = z + 3i$; b) $z' = 2z + 3i$; c) $z' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}z$; d) $z' = -2iz + 3i$;

e) $z' = -iz + 1$; f) $z' = iz + 5$; g) $z' = 21z - 6i$; h) $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$; i) $z' = 21\bar{z} - 6i$;

j) $z' = (1 + i)z - 1 + i$; k) $z' = e^{i\pi}z + 3$.

Exercice 34

- Soient K, L, M les points d'affixes respectives :

$$z_K = 1 + i ; \quad z_L = \bar{z}_K ; \quad z_M = -i\sqrt{3}$$

Place ces points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité graphique : 4cm). On complètera la figure dans les questions suivantes :

- on appelle N le symétrique du point M par rapport au point L . Vérifie que l'affixe z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
 - La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C . Détermine les affixes respectives z_A et z_C des points A et C .

- c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B . Détermine les affixes respectives z_D et z_B des points D et B .
3. a) Montre que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.
- b) Montre que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.
- c) Dédus en les natures du triangle BCK et du quadrilatère $ABCD$.
4. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S qui transforme K en L et L en K .

Exercice 35 : Extrait du Bac 2009 SBT (T. S.Exp)

I.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $[z^2 - 2(1 + i)z + 4i] \times (z^2 + 4z + 8) = 0$.
 Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C, D tels que :
- A et B ont même abscisse
 - A et C ont même ordonnée

2. Définir la similitude directe S du plan complexe telle que $S(A) = C$
 $S(B) = D$. En donner l'angle, le rapport et le centre Ω .

- II. Soient les points M, L, I d'affixes respectives $1, i$ et $-i$. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre L et qui associe le point M au point I .
 Caractériser la similitude S

Exercice 36

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20$

1. Détermine les nombres complexes b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait
 $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 3 + i$
- Faire une figure.
 - Démontre que $ABCD$ est carré
4. Soit S la similitude directe transformant A en A et C en B .
- Détermine l'écriture complexe de S .
 - Détermine les éléments caractéristiques de S .
 - Détermine l'image du point B par S .
 - Construire l'image du carré $ABCD$ par S .
 - Détermine l'image de la droite $(C): x^2 - 2x + y^2 - y = 2$ par S .
 - Détermine l'image de la droite $(D): x - y = 2$ par S .

Exercice 37

Dans un repère orthonormé, on considère la transformation T qui fait correspondre à un point M d'affixe Z le point M' d'affixe Z' tel que $:Z' = (1 + i\sqrt{3})Z + 2\sqrt{3}$

- Quelle est la nature de T .
- Soit (D) la droite d'équation $x - y\sqrt{3} = 0$. Trouver l'image de la droite (D') par la transformation T .

3. Quel est le transformé (C') du cercle (C) de centre A(0, 2) et de rayon $r = 2$. Donner l'équation de (C').

Exercice 38

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{U}; \vec{V})$.

1. Résoudre l'équation $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$
2. On considère les complexes $Z_1 = \sqrt{3} + i$ et $Z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2 . Déterminer le module et argument de Z_1 et Z_2 ; placer M et N sur la figure.
3. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{W} = -2\vec{U}$.

Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.

4. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
 - a. Placer ces points sur la figure.
 - b. Calculer les affixes R et S. Montrer que S appartient au segment [MN].
5. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$
 - a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et que $-\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
 - b. Exprimer les affixes Z de $\vec{PR}$ et Z' de $\vec{PS}$.
 - c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - d. Dédurre des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 39

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = 1 + 3i$. Soit S la similitude directe de centre A et qui transforme C en B.

6. Détermine l'écriture complexe de S.
7. Détermine les éléments caractéristiques de S.
8. Détermine l'image du point B par S.

Exercice 40

On considère le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$

1. a) Vérifier que 4 est une racine de P, puis déterminer les nombres réels α, β, γ tels que : $P(Z) = (Z - 4)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

2. Le plan est rapporté d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$ tel que $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = 2\text{cm}$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.

- a. Placer les points A, B et C sur la figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
 - b. Quelle est la nature du triangle ABC.
3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$, on appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\vec{OB}$.
 - a. Déterminer les affixes des points F et G.

- b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.
 - a. Calculer l'abscisse de point H.
 - b. Montrer que ce parallélogramme est un carré.

Exercice 41 : (Corrigé dans DONI MATHS TSEXP)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 4 cm. On appelle A, B et C les points d'abscisses respectives $2i$; 1 et $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit R la transformation

du plan qui, à tout point M d'abscisse z , associe le point M' d'abscisse z' tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

1) Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R .

2) Soit (Γ) l'ensemble des points M d'abscisse z tels que $|z - 2i| = 2$.

a) Détermine puis construis (Γ) .

b) Détermine puis construis l'image de (Γ) par la transformation R .

3) Soit (D) l'ensemble des points M d'abscisse z tels que $|z - 1| = \left|z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$.

a) Détermine puis construis (D) .

b) Détermine puis construis l'image de (D) par la transformation R .

Exercice 42 : (Corrigé dans DONI MATHS TSEXP)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A :

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$.

2) Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$.

a) Montre que $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.

b) Factorise $P(z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

On donne les points A, B et C d'abscisses respectives :

$z_A = 2$; $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = -2 + 4i$.

1) a) Calcule le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et déduis-en la nature du triangle ABC .

b) Montre que le point E d'abscisse $2i$ est le milieu du segment $[AC]$.

c) Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'abscisse z vérifiant l'équation suivantes :

$$|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a) Détermine le rapport k et l'angle θ de la similitude S .

b) Détermine l'écriture complexe associée à la similitude S .

Exercice 43

1) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0, \text{ détermine le module et un argument de chaque solution.}$$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'abscisse Z associe le point M' d'abscisse Z' défini par $Z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}Z$.

a) Détermine la nature de la transformation T et donne tous ses éléments caractéristiques.

b) Soit A le point d'affixe $Z_A = -\sqrt{3} + i$. Détermine les affixes respectives Z_B et Z_C des points B et C tels que $B = T(A)$ et $C = T(B)$. Construis les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

3) Calcule $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ puis en déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 44

1. Calculer $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. En déduire dans l'ensemble C des nombres complexes les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$

2. On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.

a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

Soient les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i); z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \text{ et } z_C = -1$$

a) Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B .

b) Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.

4) Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe réel.

a) Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique.

b) Démontrer que : $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD

5) Soit e le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et F son symétrique par rapport à O . On considère la similitude directe S qui transforme E en A et F en B .

a) Déterminer l'écriture complexe de S et ses éléments caractéristiques.

b) Soit (C) le cercle de centre E et de rayon r . Déterminer l'image (C') de (C) par S .

Exercice 45

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est : 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i, 2$ et $1 + i\sqrt{3}$.

1 a) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J) .

2 Soit δ la similitude directe de centre O qui transforme B en C

a) Justifie que l'expression complexe de δ est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$

b) Justifie que δ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle

3 Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.

a) Détermine et construis (E)

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par e .

4 Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que :

$$|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$$

a) Détermine et construis (F)

b) Justifie que le point O et le point K milieu du segment $[BC]$ appartiennent à (F)

c) Justifie que l'image de (F) par δ est la droite (OJ) .