

## EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 1 :**

Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

**a)**  $Z = 7 - 3i$  ; **b)**  $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$  ; **c)**  $Z = (-1 - i)^3$  ; **d)**  $Z = i^5$  ; **e)**  $Z = 0$  ; **f)**  $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$

**Exercice 2 :**

Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants :

**a)**  $Z = -i$  ; **b)**  $Z = \frac{\sqrt{3} + i}{i}$  ; **c)**  $Z = (1 + 2i)^3$  ; **d)**  $Z = 3$  ; **e)**  $Z = (1 + i)(-1 + 3i)^2$ .

**Exercice 3 :**

On donne les nombres complexes suivants :  $Z_1 = 1 - 2i$  et  $Z_2 = 3 + i$ .

Ecrire sous forme algébrique :  $Z_1 + Z_2$  ;  $Z_1 - Z_2$  ;  $Z_1 \times Z_2$  ;  $Z_1^2$  ;  $\frac{1}{Z_2}$  ;  $\frac{Z_2}{Z_1}$

**Exercice 4 :**

Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

**a)**  $Z = -i$  ; **b)**  $Z = \sqrt{3}$  ; **c)**  $Z = \frac{1-i}{2}$  ; **d)**  $Z = 1 - i\sqrt{3}$  ; **e)**  $Z = 1 + i$

**f)**  $Z = -1 - i$  ; **g)**  $Z = -i$  ; **h)**  $Z = 1 + i\sqrt{3}$  ; **i)**  $Z = \frac{-1+i}{2}$  ; **j)**  $Z = (-\sqrt{3} - i)^3$

**k)**  $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 + i}$

**Exercice 5 :**

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

**a)**  $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ; **b)**  $Z_2 = \frac{1}{1+i}$  ; **c)**  $Z_3 = (1 - i\sqrt{3})^4$  ; **d)**  $Z_4 = \frac{(1-i)^4}{(-\sqrt{3}-i)^3}$

**e)**  $Z_5 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$  ; **f)**  $Z_6 = (1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$  ; **g)**  $Z_7 = (1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}$  ; **h)**  $Z_8 = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

**i)**  $Z_9 = (-1 - i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

**Exercice 6 :**

Compléter le tableau suivant

|                              |                     |                                    |                                                                                       |
|------------------------------|---------------------|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Formes algébriques de Z      | $-5(1 - i\sqrt{3})$ |                                    |                                                                                       |
| Formes trigonométriques de Z |                     |                                    | $2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ |
| Formes exponentielles de Z   |                     | $e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ |                                                                                       |

**Exercice 7 :**

On pose :  $A = 5\sqrt{2}(1+i)$  ;  $B = -5(1+i\sqrt{3})$

1) Déterminer le module et un argument de :

$$A ; B ; \bar{A} ; \frac{1}{A} ; \frac{B}{A} ; B \times A ; \frac{A}{B^2}$$

2) Soit  $Z$  un nombre complexe tel que :  $AZ = B$

- Ecrire  $Z$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{13\pi}{12}$  et  $\sin \frac{13\pi}{12}$
- Calculer  $(Z)^{2008}$

**Exercice 8 :**

**I. On pose :**  $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

- Calculer  $Z^2$  puis déterminer son module et son argument
- En déduire de ce qui précède le module et un argument  $Z$ .

**II. On pose :**

$$Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} ; Z' = 1-i$$

- Ecrire  $\frac{Z}{Z'}$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

**Exercice 9 :**

Déterminer puis construire :

- l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  d'affixes  $Z$  tels que :  $|Z-i| = 2$
- l'ensemble  $(\lambda)$  des points  $M$  d'affixes  $Z$  tels que :  $|Z+1-2i| = |Z-1-i|$
- l'ensemble  $(\varphi)$  des points  $M$  d'affixes  $Z$  tels que :  $\arg(Z-1+2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$
- l'ensemble  $(\omega)$  des points  $M$  d'affixes  $Z$  tels que :  $\arg(3\bar{Z}-1+i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

**Exercice 10 :**

**I)** Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On désigne par  $M$  le point de affixe  $z$  et  $M'$  le point d'affixe  $Z$  tel que :  $Z = \frac{z+1}{z-1}$

- Trouver l'ensemble  $(D)$  des points  $M$  tels que  $Z$  soit un réel
- Trouver l'ensemble  $(C)$  des points  $M$  tel que  $Z$  soit un imaginaire.

c) Trouver l'ensemble (M) des points M tels que M et M' soient alignés.

II.) Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe distinct de  $-1$  et soit  $Z = \frac{2iz - i}{z + 1}$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe  $z$  vérifie les conditions indiquées

- a)  $|Z| = 1$                       b)  $Z$  est un imaginaire.                      c)  $Z$  est un réel.

III) A tout nombre complexe  $z \neq -1 + 2i$ , on considère le nombre complexe  $Z$  tel que

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie les conditions indiquées :

- a)  $|Z| = 1$                       b)  $|Z| = 2$   
c)  $Z$  est un réel                      d)  $Z$  est un imaginaire.

**Exercice 11 :**

Linéariser les expressions :  $A = \sin^3 x$  ;  $B = \cos^3 \frac{x}{2}$  ;  $C = \cos^5 x$  ;  $D = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$

**Exercice 12 :**

On considère les nombres complexes  $A = 3 + i\sqrt{3}$  et  $B = -2 - 2i$

- Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes  $A$  et  $B$
- Ecris sous la forme trigonométrique  $A$  ;  $B$  ;  $\bar{A}$  ;  $\bar{B}$  ;  $A \times B$  ;  $\frac{A}{B}$  ;  $A^{2024}$
- Soit  $Z$  le nombre complexe tel que  $Z \times B = A$ 
  - Ecris  $Z$  sous forme algébrique et trigonométrique.
  - En déduis les valeurs exactes de  $\cos \frac{13\pi}{12}$  et  $\sin \frac{13\pi}{12}$
  - Résous dans  $]-\pi ; \pi[$  l'équation :  $-(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cos x + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin x = -2$

**Exercice 13 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $Z^2 + Z + 1 = 0$  ; b)  $Z^2 - 2Z + 1 = 0$  ; c)  $Z + \frac{1}{Z} + 1 = 0$  ; d)  $Z = \sqrt{2} - \frac{1}{Z}$

e)  $Z^2 - 2\bar{Z} + 1 = 0$  ; f)  $2Z^2 + 3|Z|^2 - 1 = 0$  ; g)  $iZ^2 + 2\bar{Z} + 2 - i = 0$

h)  $-3Z^2 + 2Z + 1 = 0$  ; i)  $Z^2 + 2\sin \alpha Z + 1 = 0$  ; j)  $Z^2 - 2\cos \alpha Z + 1 = 0$

**Exercice 14 :**

- Développer le produit de facteurs suivant :  $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
- Résoudre l'équation  $Z^4 = 1$
- En déduire des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ puis } \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right) + 1 = 0$$

**Exercice 15 :**

Déterminer dans  $\mathbb{C}$  :

- a) Les racines cubiques de  $4\sqrt{3}-4i$
- b) Les racines quatrièmes de 1
- c) Les racines cinquièmes de  $i$
- d) Les racines sixièmes de  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

**Exercice 16 :**

On donne le nombre complexe  $Z$  tel que :  $Z = 2 + 3i$

- a- Vérifier que  $Z^4 = -119 - 120i$
- b- Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
- c- En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $Z^4 = -119 - 120i$

**Exercice 17 :**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le polynôme  $P(Z)$  telque :  $P(Z) = Z^3 + 9i Z^2 + 2(6i - 11) Z - 3(4i + 12)$

**a-** Démontrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution réelle que l'on notera  $Z_1$ , dont on déterminera la valeur.

**b-** Factoriser  $P(Z)$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(Z) = 0$

**Exercice 18 :**

Soit  $f$  la fonction à variable complexe  $Z$  telle que :

$$f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$$

**a-** Prouver que si  $Z_0$  est une solution de l'équation  $f(Z) = 0$  alors les complexes :  $\overline{Z_0}$  et  $\frac{1}{Z_0}$  en sont aussi.

**b-** Déterminer  $f(1+i)$  et en exploitant ce qui précède, trouver toutes les solutions de l'équation  $f(Z) = 0$ .

**Exercice 19 :**

Soit le polynôme  $P(Z)$  définie par :

$$P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$$

**a-** Vérifier que :  $P(Z) = Z^2 \left[ \left( Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - \left( Z + \frac{1}{Z} \right) (1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$  avec  $(Z \neq 0)$

**b-** En utilisant la question précédente, résoudre l'équation  $P(Z) = 0$ .

**Exercice 20 :**

Soit  $P(Z) = Z^3 - (4+6i)Z^2 - (12-24i)Z + 32-24i$

- a- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
- b- Montrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution réelle notée  $z_0$  que l'on déterminera.
- c- Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que  $P(Z) = (Z - z_0)(aZ^2 + bZ + c)$
- d- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$

**Exercice 21 :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^6 + 1 = 0$

2) On pose  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Soit A, B, C, D, E, F les points d'affixes respectives :  $2\alpha$  ;  $4\alpha^3$  ;  $4\alpha^5$  ;  $\frac{1}{\alpha}$  ;  $\frac{1}{\alpha^3}$  ;  $\frac{2}{\alpha^5}$

Représenter ces six points dans le plan complexe muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**Exercice 22 :**

On pose  $P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26$ .

1)  $\alpha$  désigne un nombre complexe quelconque. Montrer  $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ .

En déduire que si  $P(\alpha) = 0$  alors  $P(\bar{\alpha}) = 0$ .

2) Calculer  $P(1 + i)$  puis en déduire deux solutions complexes de l'équation  $P(Z) = 0$ .

3) On donne  $Q(Z) = [Z - (1 + i)][Z - (1 - i)]$

a- Vérifier que le polynôme  $P(Z)$  est divisible par  $Q(Z)$ .

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$ .

**Exercice 23 :**

I. Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs :  $-1 - i$  ;  $2 + 3i$  ;  $-10 - 13i$ .

Démontrer que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

II. Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs :  $3 + i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

a- Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

b- Déterminer l'axe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on fera une figure).

III. Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs :  $-1 + i$  ;  $-1 - i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

a- Étudier la nature des triangles ABC et BCD.

b- Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

**Exercice 24 :**

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

On considère :

- Le point A d'affixe  $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$ .
- Le point B d'affixe  $Z_B$  est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle  $(\vec{OA} ; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$ .
- Le point Q d'affixe  $Z_Q$  est tel que le point Q soit milieu du segment  $[OB]$ .
- Le point K d'affixe  $Z_K$  est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminer les affixes  $Z_B$  ;  $Z_Q$  et  $Z_K$  respectivement des points B ; Q et K.

2) Démontrer que  $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$  est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OKA ?

Placer les points A ; B ; Q et K dans le plan.

3) Soit C la point d'affixe  $Z_C$  tel que  $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculer  $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$ . Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ?

b- Placer le point C. (On fera une figure).

**Exercice 25 :**

**A-** Dans le plan P muni de son repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , on considère l'équation à variable complexe notée et déterminée par : (E)  $Z^3 + (1 - i)Z^2 - 2(11 + i)Z - 48i = 0$

1-) Prouver que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera  $z_0$ .

2-) a-) Achever la résolution de l'équation (E). On notera  $Z_1$  et  $Z_2$  les autres solutions trouvées telles que  $|Z_2| < |Z_1|$ .

b-) Donner les écritures exponentielles de  $Z_1$  et de  $Z_2$ .

3-) On considère G et F, les points du plan d'affixes respectives  $Z_1$  et de  $Z_2$ . Donner

l'expression exponentielle du complexe  $\frac{Z_1}{Z_2}$ . Déduire que le triangle OGF est rectangle en O.

**B-** Dans le plan P muni de son repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , on considère le polynôme complexe noté et déterminé par :

$$P(Z) = Z^3 - (4 - i)Z^2 + (5 - 4i)Z + 5i$$

1-) Prouver que l'affixe du point Q(0 ; -1) est une solution de l'équation  $P(Z) = 0$

2-) a-) Achever la résolution de l'équation  $P(Z) = 0$

b-) En notant R et S les points du plan dont les affixes sont les autres solutions de a-), placer Q, R et S dans le repère et prouver que ces points forment un triangle isocèle.

**Exercice 26 :**

Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que  $Z' = (1 + i)Z + 1 - i$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

**Exercice 27 :**

**Partie A :** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

2) Soit  $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a) Montrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution réelle notée  $z_0$  que l'on déterminera.

b) Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que  $P(Z) = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$

**Partie B:**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, i, j)$

On donne les points A(2), B(4 + 2i) et C(-2 + 4i).

1) a- Placer les points A, B et C dans le repère  $(o, i, j)$

b- Calculer le rapport  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$  et en déduire la nature du triangle ABC

c-Montrer que le point F d'affixe  $2i$  est le milieu du segment  $[AC]$

d-Déterminer (  $\Delta$  ) l'ensemble des points du plan d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$

2) Soit  $S$  la similitude du plan telle que  $S(A)=A$  et  $S(B)=C$ .

a- Déterminer le centre, le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$  de la similitude  $S$

b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à la similitude  $S$ .

### Exercice 28 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ . On considère les points :

A d'affixe  $-4$  ; B d'affixe  $4$  ; E d'affixe  $4i$  ; C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOEC soient des carrés.

1. Placez les points précédents dans le repère  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$  et donnez les affixes des points C et D.

2. Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point M d'affixe  $z$  fait correspondre le point M d'affixe  $Z' = (1+i)Z + 4 + 4i$ .

a. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .

b. Précisez les points  $f(A)$  et  $f(O)$ .

c. Déterminez l'image par  $f$  de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment  $[AO]$ .

d. Exprimez, pour tout point M d'affixe des vecteurs  $\vec{MN}$  et  $\vec{MC}$  en fonction de  $Z$ . Déduisez-en que  $MM' = MC$  et, pour M distinct de C, montrez qu'une mesure de l'angle de vecteurs  $(\vec{MM'} ; \vec{MC})$  est  $\frac{\pi}{2}$

### Exercice 29 :

1° On se propose de résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = 0$ .

a) Déterminer le réel  $y$  tel que  $iy$  soit solution de (E)

b) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $Z$  :

$$Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - 1 = (Z - i)(Z^2 + aZ + b).$$

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E') :  $Z^2 + Z\sqrt{3} + 1 = 0$ .

d) En déduire les solutions de (E).

2° On considère le point A d'affixe  $Z_A = i$ , le point d'affixe  $Z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$  et le point C

symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

a) Placer ces points sur un graphique.

b) Déterminer le module et un argument du quotient :  $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ .

c) En déduire une mesure en radians de l'angle  $(\vec{BA}, \vec{BC})$  et la nature du triangle ABC.