

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

- 1) Calculer $f(i)$ et en déduire une factorisation de $f(z)$.
- 2) a) Résoudre dans, l'équation $f(z)=0$;
b) Calculer le module et l'argument de chaque solution de l'équation.
- 3) On désigne z_1 ; z_2 et z_3 les solutions de l'équation $f(z)=0$; z_2 étant celle d'argument $\frac{\pi}{2}$. Vérifier que : $-\frac{1}{2}z_1z_3 = z_2$.

EXERCICE 1 : (5 points)

Soient les nombres z et Z tels que $z \neq -3$ et $Z = \frac{z+1-i}{z+3}$.

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -3 ; $-1+i$ et z .
Déterminer et construire :

- a) L'ensemble E_1 des points M tels que $|Z| = 1$
- b) L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit un réel négatif
- c) L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit imaginaire pure.

EXERCICE 2 : (5 points)

Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.

En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $[(1-2i)z]^3 - i = 0$

EXERCICE 3 : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + iz^3 = 0$.

Placer les points images de ces solutions dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

2) Linéariser l'expression : $\cos^3 x \sin^2 x$.

3) Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe :

$$z = -3 + 3i$$

4) Soit z_0 le complexe d'image ponctuelle M_0 tel que $z = 3\sqrt{2}z_0$ et u l'affixe d'un point M du plan ; tel que les images ponctuelles de z_0 et u soient les sommets d'un triangle rectangle en M_0 . Déterminer l'ensemble des nombres complexes u .