

Fiche d'exercices N°2 : TSEXP

Evaluation 1

On donne les nombres complexes : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

- Calculer le module et l'argument de z_1 et z_2 .
- Donner la forme trigonométrique de $z_1 z_2$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Evaluation 2

Calculer $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{2009}$

Evaluation 3

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E): Z^3 - (2 + i\sqrt{2})Z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})Z - 2i\sqrt{2} = 0$$

- Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E) .
- Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexes z , on ait :
$$Z^3 - (2 + i\sqrt{2})Z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})Z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)(z^2 + az + b)$$
- Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Evaluation 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ unité graphique : 2 cm

- Soit le nombre $z_0 = 1 + i$
- Montre que z_0 est solution de l'équation (E) définie par :
$$Z^3 - (7 + i)Z^2 + 2(8 + 3i)Z - 10(1 + i) = 0$$
 - Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
- On considère les points $A; B$ et C du plan, d'abscisses respectives $1 + i; 3 + i; 3 - i$.
- Calcule et écris sous forme exponentielle $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$. En déduis la nature du triangle ABC .
 - Place les points $A; B$ et C dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et complète la figure au fur et à mesure.
 - Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle BAC . Détermine l'abscisse du centre G et le rayon r du cercle.
- Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'abscisse Z vérifiant la relation
$$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$$
 - Caractérise géométriquement l'ensemble (Δ)
 - Justifie que le point F d'abscisse $4 + 2i$ appartient à (Δ)

- c) Détermine l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.
 4) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $CEAF$? on se justifiera.

Evaluation5

- 1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.
 a) Calculer $P(-1)$
 b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

 c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
 2) Le plan complexe est rapporté au repère ortho normal direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique 2cm. On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_A = -1; \quad z_B = 2 + i\sqrt{3}; \quad z_C = 2 - i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_G = 3$$

 a) Réalise une figure et place les points $A; B; C$ et G .
 b) Calculer les distances $AB; BC$ et AC . En déduire la nature du triangle ABC .
 c) Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduire la nature du triangle GAC .

Evaluation6

- I) On considère la fonction f de la variable complexe z définie par

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

 1) Vérifie que $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.
 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$
 3) Ecris les solutions sous forme trigonométrique.
 II) Détermine la nature des transformations suivantes :
 a) $z' = z + 1 - 2i$
 b) $z' = iz + 1$
 c) $z' = 3z - 1 + i$
 d) $z' = (1 + i)z - 1 + i$
 III) On donne les points $A; B$ et C d'affixes respectives : $z_A = 2; \quad z_B = 4 + 2i; \quad z_C = -2 + 4i$

Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

- a) Détermine le rapport k et l'angle θ de la similitude S .
 b) Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .
 c) En déduis la nature de la similitude S .

Evaluation7

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - (4 + i\sqrt{3})z + (3 + 4i\sqrt{3})z - 3i\sqrt{0} = 0$

- 1) Montrer que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω .

- 2) Soit f , l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle pour tout nombre complexe z on a $f(z) = az + b$.
- a) Déterminer les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$
 - b) Déterminer le module et un argument de a .
 - c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .