



FICHE n°1 : NOMBRES COMPLEXES-SIMILITUDES

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 6z + 18 = 0$. Place dans le plan complexe les points B et C dont les affixes sont les solutions de cette équation, B étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire négative.
- 2) Montre que C est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 3) Soit A le point d'affixe $Z_A = 3(1 - \sqrt{3})$, calcule un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

En déduis la nature du triangle ABC , puis construis le point A .

Exercice 2

On considère l'équation $(E) : z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$.

- 1) Montre que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
- 2) En déduis les solutions de l'équation (E) , on notera z_0 la solution réelle, z_1 la solution dont la partie imaginaire est négative et z_2 la solution dont la partie imaginaire est positive.
- 3) Soient A, B, C les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 . Détermine la nature du triangle ABC .

Exercice 3

Soit l'équation $(E) : iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = 0; z \in \mathbb{C}$.

- 1) Montre l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer.
- 2) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $iz^3 + (4 - 3i)z^2 - (8 + 3i)z + 5i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
- 3) Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .
- 4) Le plan complexe est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $i; 1 + 2i$ et $2 + i$.
 - a) Place les points A, B et C .
 - b) Calcule AB, AC, BC et $\widehat{AC, AB}$; puis en-déduis la nature du triangle ABC .
 - c) Détermine z_D , l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4

- 1) Ecris le nombre complexe $z = (1 - i)^3 \times i^{11}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
- 2) Soit l'équation $(E) : (z - 1 + i)(z^2 - 3iz + 4) = 0$.
 - a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
 - b) Ecris les solutions de l'équation (E) sous forme trigonométrique et exponentielle.
 - c) Construis dans un repère orthonormé, les images, A, B, C des solutions de l'équation (E) .
 - d) Calcule les distances, AB, AC et BC puis en déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 5

On considère l'équation $(E) : z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0$.

- 1) a) Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'abscisses respectives : $z_A = 2i; z_B = 3 + i$ et $z_C = -4 + i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le repère.
 - b) Ecris sous la forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$, puis en déduis la nature du triangle ABC .
- 3) Détermine l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 6

On considère le polynôme définie par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

- 1) Calcule $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis factorise $P(z)$ en produit de deux polynômes du second degré.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Place, dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$.
- 4) On note E le symétrique de D par rapport à O .
 - a) Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_E - z_B}$.
 - b) En déduis la nature du triangle BEA .

Exercice 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) . Unité : 2 cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E) : iz^3 - (-1 + 5i)z^2 + (-6 + 10i)z + 16 - 8i = 0$.

- 1) Demontre que (E) admet une unique solution imaginaire pure z_0 .
- 2) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que :
 $\forall z \in \mathbb{C}, iz^3 - (-1 + 5i)z^2 + (-6 + 10i)z + 16 - 8i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.
- 3) On pose $Q(z) = iz^2 - (1 + 5i)z + 4 + 8i$.
 - a) Détermine les racines carrées du nombre complexe $U = 8 - 6i$.
 - b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$.
- 4) En déduis les solutions de l'équation (E) .
- 5) Soit A, B et C les points d'abscisses respectives : $z_A = 3 + i, z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan Complexe.
 - b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
- 6) Détermine l'abscisse du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 7) a) Vérifie que I est le milieu du segment $[BC]$.
b) Démontre que l'abscisse du point E , symétrique de A par rapport au point I est $z_E = -1 - i$.
- 8) Démontre que les points A, B, C et E appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 8

- 1) On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = iz^3 + (5 - 2i)z^2 - (4 + 9i)z - 9 - 6i$.
 - a) Vérifie que $3i$ est une solution de l'équation : $P(z) = 0$.
 - b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 3i)(iz^2 + az + b)$.
- 2) a) Calcule $(2 + i)^2$.
b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : iz^2 + (2 - 2i)z + 2 - 3i = 0$.
c) Déduis des questions 1.a) et 2.b) les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A et B d'abscisses respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3 + 2i$.
 - a) Détermine z_K l'abscisse du point K milieu du segment $[AB]$.
 - b) On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan d'abscisse z tels que : $|z - 1 - i| = \sqrt{5}$.
Justifie que le point B appartient à (Γ) .
 - c) Détermine (Γ) .

Exercice 9

On pose : $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 7i + 4$.

- 1) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on donnera.
- 2) Trouve les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
- 3) a) Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0$.
b) En déduis la résolution de l'équation $P(z) = 0$.
- 4) Soit A, B et C les points d'abscisses respectives : $2 - i, i$ et $2 + 3i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b) Calcule : AB, AC et BC . En déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 10

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{2+i}{3-i}$; $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- 1) Détermine le module et un argument du nombre complexe z_1 .
- 2) a) Ecris le nombre complexe z_2 sous forme algébrique et démontre que $z_2 = \overline{z_1}$.
b) Ecris sous forme exponentielle le nombre complexe z_2 .
- 3) Ecris le nombre complexe z_3 sous forme algébrique.
- 4) On donne $Z = z_2 z_3$.
 - a) Calcule le module et un argument du nombre complexe Z .
 - b) Ecris le nombre complexe Z sous forme algébrique.
 - c) Déduis-en les valeurs exactes de nombres réels $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 11

Soit le nombre complexe $Z = \frac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$.

Ecris Z sous la forme :

- 1) Trigonométrique.
- 2) Exponentielle.

Exercice 12

On donne : $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Donne la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
- 2) Trouve la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
- 3) Déduis : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 13

On considère les nombres $z_1 = (\sqrt{3} + 1)(1 + i)$; $z_2 = (\sqrt{3} - 1)(-1 + i)$

- 1) Calcule le module et l'argument des nombres complexes z_1 et z_2 .
- 2) On pose $u = z_1 \cdot z_2$ et $v = \frac{z_1}{z_2}$. Détermine le module et l'argument des nombres complexes u et v .
- 3) On pose $w = z_1 + z_2$ et $t = z_1 - z_2$. Détermine le module et l'argument des nombres complexes w et t .
- 4) En déduis le module et l'argument du nombre complexe $x = z_1^2 - z_2^2$.

Exercice 14

On considère l'équation (E): $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

- 1) Montre que (E) admet une solution réelle z_0 . Détermine z_0 .
- 2) Montre que (E) admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3), B(2i)$ et $C(6 - 2i)$.
 - a) Place les points A, B et C .
 - b) Détermine la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - c) Interprète géométriquement le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - d) En déduis que les points A, B et C sont alignés.
- 5) Soit S la transformation d'écriture complexe $z' = e^{\frac{\pi i}{3}} z$.
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de S .

Exercice 15

A// On considère l'équation (E) : $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$, où z est un nombre complexe.

- 1) Démontre que le nombre complexe i est solution de cette équation.
- 2) Détermine les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z ,
 $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
- 3) En déduis les solutions de l'équation (E).

B// Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i, 2 + 3i$ et $2 - 3i$.

- 1) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Détermine l'affixe du point A' image de A par la rotation r .
- 2) Démontre que les points A', B et C sont alignés et détermine l'écriture de l'homothétie de centre B qui transforme C en A' .

Exercice 16

On considère l'équation : (E) : $z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$.

- 1) Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3, z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b) Montre que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
 - c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B .
Donne l'écriture complexe de S et précise son centre Ω .

Exercice 17

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Soit le polynôme P de la variable complexe z tel que : $P(z) = z^3 + z^2 + (-5 + 4i)z - 21 - 12i$.

- 1) Calcule $P(3)$ et mets $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Dans le plan complexe soit les points A, B et C d'affixes respectives $3 ; 1 - 2i ; 3 + 2i$.
 - a) Détermine la similitude directe de centre A qui transforme B en C .
 - b) Détermine ses éléments caractéristiques.

Exercice 18

- On considère l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.
 - Justifie que $2i$ est une solution de (E) .
 - Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4)$.
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.
 - Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i, 1-i, 2i$ et $-2-2i$.
Place les points A, B, C et D dans le plan complexe. Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.
- Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
 - Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$ et justifie que $S(B) = C$.
 - Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S .

Exercice 19

On considère l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.

- Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réels z_1 .
- On désigne par z_2 et z_3 les deux autres solutions de l'équation.
 - Mets z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
 - Soient A, B et C les points images des z_1, z_2 et z_3 . Représente ces points et donne la nature du triangle ABC.
- Montre qu'il existe une et une seule similitude directe plane S transformant A en B et B en C.

Exercice 20

On considère le polynôme P , de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 - 4(1-i)z - 12 + 12i$.

- Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 .
- Détermine un polynôme Q du second degré tel que : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.
- Place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $2i; -1-i; 6; 3-2i$ et $-1+6i$.
 - Calcule le nombre $W = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - Quelle est la nature du triangle ABC. (Justifie ta réponse)
 - Détermine la similitude S , qui transforme le point A en D et le point C en E. On donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 21

On considère l'équation $(E) : z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z + 9-45i = 0$.

- Détermine la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E) .
 - Achève la résolution de (E) .
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points A, B et C d'affixes respectives : $3i; 3+3i$ et $3-2i$.
 - Place les points A, B et C dans le repère.
 - Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduis la nature de ABC.
- soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
 - Détermine l'écriture complexe de f .
 - Détermine les éléments caractéristiques de f .

Exercice 22

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (1+2i)z^2 - 3z + 2i - 1$.

- Montre que le polynôme $P(z)$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.
- Détermine trois nombres complexes a, b et c tel que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité 2 cm), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i, 2+i$ et -1 .
 - Place les points A, B et C.
 - Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calcule l'affixe de D.
 - Calcule le nombre $Z = \frac{z_A}{z_A - z_B}$. Détermine le module et un argument de Z .
En déduis la nature du triangle OAB.