

PREPABAC 2022	NOMBRES COMPLEXES	COURS PRIAMS
TSEXP		70 64 74 69 / 65 36 01 70

Exercice 1 (BAC TSEXP 2021)

On considère, dans $\mathbb{C}$, le polynôme $p(z)$ suivant :

$$p(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i).$$

- Démontre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_1 que l'on déterminera.
- Détermine le polynôme $q(z)$ tel que :
 $p(z) = (z - z_1)q(z)$.
- Démontre que l'équation $q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_2 que l'on déterminera.
- Résous, dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$.
- On note z_3 , la troisième solution de l'équation $p(z) = 0$.
Démontre que les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 sont alignés.

Exercice 2 (BAC TSEXP 2020)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):

$$z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = 0.$$

- Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E).
- Détermine les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :
 $z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2} = (z - iy)(z^2 + az + b)$.
- Achève la résolution de (E) puis écris chacune des solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 3 (BAC TSEXP 2019)

- Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$$

- Calcule $P(-1)$.
 - Détermine les réels a et b tels que pour tout nombre z , on ait : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (unité : 2cm). On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2 + \sqrt{3}i$, $z_C = 2 - i\sqrt{3}$, $z_G = 3$.
 - Réalise une figure et place les points A, B, C et G.
 - Calcule les distances AB, AC et BC puis en déduis la nature du triangle ABC.
 - Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$.

En déduis la nature du triangle GAC

Exercice 4 (BAC TSEXP 2018)

I/ On considère la fonction de la variable complexe définie par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i.$$

- Vérifie que $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- Ecris les solutions l'équation $f(z) = 0$ sous forme trigonométrique.

II/ Détermine la nature des transformations suivantes dans le plan complexes et détermine leurs éléments caractéristiques.

- $z' = z + 1 - 2i$;
- $z' = iz + 1$;
- $z' = 3z - 1 + i$;

$$4) z' = (1 + i)z - 1 + i.$$

Exercice 5 (BAC TSEXP 2017)

On pose : $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i$.

- Calcule $P(2i)$.
- En déduis une factorisation de $P(z)$.
- Résous l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 6 (BAC TSEXP 2016)

- Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, détermine le module et un argument de chaque solution.
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.
 - Détermine la nature de la transformation T et donne tous ses éléments caractéristiques.
 - Soit A le point d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$. Détermine les affixes respectives z_B et z_C des points B et C tels que $B = T(A)$ et $C = T(B)$. Construis les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ puis en déduis la nature du triangle ABC.

Exercice 7 (BAC TSEXP 2015)

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

- Ecris z_1, z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique.
- Montre qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

Exercice 8 (BAC TSEXP 2014)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E) :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0.$$

- Détermine le réel y tel que iy soit une solution de (E).
 - Détermine les réels a et b tels que pour tout complexe z
 $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$.
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$
 - En déduis les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

Exercice 9 (BAC TSEXP 2014)

A//

- Détermine le nombre complexe z_1 tel que $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1 + i\sqrt{3})z_1] = \frac{7\pi}{12}$.
- Soit $P(z) = z^2 - 4z + 8$.
 - Montre que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. Trouve l'autre solution z_2 .
 - Détermine le module et un argument de z_2 .

B// Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z$.

- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f .

- 2) Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f , A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; $P(z)$ défini dans A// 2).

Exercice 10 (BAC SBT 2013)

- 1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

b) $z + \frac{1}{z} = 1$; $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

- 2) Soit P le polynôme de la variable complexe z tel que :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

- a) Vérifie que pour tout z non nul on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}.$$

- b) En utilisant ce qui précède, résous l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11 (BAC SBT₁ 2012)

I/ On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$; $c = \frac{a^2}{b^3}$.

- 1) Détermine le module et un argument de c .

- 2) Donne la forme trigonométrique de $t = ab$.

II/ Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on

considère le polynôme d'inconnue z :

$$P(z) = z^3 - 4iz^2 - 6z + 4i$$

- 1) Calcule $P(2i)$.

- 2) Détermine les complexes a et b tels que pour tout complexe z on ait : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.

- 3) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On désigne par z_1 la solution imaginaire pure et par z_2 et z_3 les deux autres solutions.

- b) Compare z_1 et $z_2 + z_3$.

Exercice 12 (BAC SBT₂ 2012)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne

l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0.$$

- 1) Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_2 .

On désigne par z_3 la 3^{ème} solution.

- 2) Ecris z_0 et z_1 sous forme trigonométrique.

- 3) Vérifie que z_0 , z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (U_n) dont on précisera la raison.

- 4) Ecris U_4 et U_7 sous forme trigonométrique.

Exercice 13 (BAC SBT 2011)

- 1) Complète le tableau suivants :

Nombre complexe	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
z_A			$4e^{i\frac{\pi}{2}}$
z_B		$4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$	
z_C	$2\sqrt{3} - 2i$		

- 2) Place les points A, B et C d'affixes respectives les nombres complexes z_A , z_B et z_C dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 3) Calcule les affixes z et z' des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sous forme algébrique puis exponentielle.

- 4) Montre que $z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z$.

Exercice 14 (BAC SBT 2010)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

Ecris a et b sous forme exponentielle et place les points A d'affixe a et B d'affixe b dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Calcule a' affixe de $A' = r(A)$.

Ecris a' sous forme algébrique et place A' dans le même repère.

Exercice 15 (BAC SBT 2009)

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z^2 - 2(1 + i)z + 4i)(z^2 + 4z + 8) = 0.$$

Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C, D tels que :

- A et B ont même abscisse.
- A et C ont même ordonnée.

- 2) Définis la similitude directe s du plan complexe telle que : $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

Donne l'angle, le rapport et le centre de s .

Exercice 16 (BAC SBT 2008)

Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i ; z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i ; z_3 = -1 + \sqrt{3}i.$$

- 1) Détermine le module et un argument des complexes :

z_1 ; z_2 et z_3 . En déduis que les points M_1 ; M_2 et M_3

d'affixes respectives z_1 ; z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Fais la représentation graphique.

- 2) On pose $z_4 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^2$.

Mette z_4 sous la forme algébrique

- 3) Détermine les racines carrées de z_4 .

- 4) On pose $z_5 = -4z_1z_3$.

Détermine les racines quatrièmes de z_5 .

Fais la représentation graphique.

- 5) a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

- b) Ecris chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 17 (BAC SBT 2007)

- 1) On considère dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i ; b = 1 + (1 + \sqrt{3})i \text{ et } c = (1 + \sqrt{3})i.$$

- a) Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants : $a - b$; $c - a$ et $c - b$.

- b) En déduis la nature du triangle ABC.

- 2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé Direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les points A $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; B $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et C(0; -1).

On considère l'application s du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i\sqrt{3})z$.

- Détermine les affixes des points A' , B' et C' images respectives des points A , B et C par s .
- Construis dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points A' , B' et C' par s .

Exercice 18 (BAC SBT 2006)

Soient les points A , B et C d'affixes respectives : 1 ; i et $-i$. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre B et qui associe le point A au point C .

Caractérise la similitude de S .

Exercice 19 (BAC SBT 2005)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes associés au plan affine $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = \frac{i-13}{-12+14i} \text{ et } z_2 = \frac{2i+1}{1-3i}.$$

- Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis détermine le module et un argument de chacun d'eux.
- On désigne par A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 , détermine le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et

En déduis la nature du triangle AOB .

Exercice 20 (BAC SBT 2004)

Soit dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z , $(E) : z^2 - (\sqrt{3} + i)z + (1 + i\sqrt{3}) = 0$.

- Calcule $(1 - i\sqrt{3})^2$.
- On pose $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$.
Ecris a et b sous forme trigonométrique.
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) , puis vérifie que ses solutions s'expriment simplement en fonction de a et b .
- Représente dans le plan les points images des complexes a et b et en déduis la représentation des points images des solutions de (E) .

Exercice 21 (BAC SBT 2003)

Soit le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$, d'inconnue z .

- Montre que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$ alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi solution de l'équation $P(z) = 0$.
- Calcule solution de l'équation $P(-i)$, puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
- Ecris chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 22 (BAC SBT 2002)

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

- Résous dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y + z = 2 - 2i \end{cases}$$
- (x, y, z) étant la solution du système ci-dessus, on désigne par A , B , C les points du plan d'affixes respectives x , y et z .
 - Détermine le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z-x}{z-y}$.
 - En déduis la nature du triangle ABC , puis le construis dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 23 (BAC SBT 2001)

- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 25 = 0$.
- Effectue $(1 + 2i)^4$.
- Détermine et représente les racines quatrièmes du nombre complexe : $z = -7 - 24i$.
les racines quatrièmes de l'unité sont : 1 ; i ; -1 ; $-i$.

Exercice 24 (BAC SBT 2000)

- Résous l'équation :
 $z \in \mathbb{C}, z^3 - (1-i)z^2 + z - 1 + i = 0$
Sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.
- Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$, les solutions z_1 ; z_2 ; z_3 de l'équation proposée ont pour images respectives les points A , B , C . Place ces points dans $(\mathcal{P})$.
- Détermine le complexe complexe z_4 dont l'image est le point D , quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.
- Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1 ; z_2 ; z_3 .
- Calcule $(2 + i)^2$.
 - Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, iz^2 - iz - 1 + i = 0$.

Exercice 25 (BAC SBT 1999)

Soit f l'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

- Détermine deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z , on ait : $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$.
- En déduis l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(x) = 0$.
- Détermine les réels r et θ tels que : $[r ; \theta] = 1 + i$.

Exercice 26 (BAC STG 2016)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 6z + 18 = 0$. Place dans le plan complexe les points B et C dont les affixes sont les solutions de cet équation, B étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire négative.
- Montre que C est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Soit A le point d'affixe $z_A = 3(1 - \sqrt{3})$, calcule un argument du nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduis la nature du triangle ABC , puis construis le point A .

Exercice 27 (BAC STG 2018)

- Ecris le nombre complexe $z = (1 - i)^3 \times i^{11}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
- Soit l'équation $(E) : (z - 1 + i)(z^2 - 3iz + 4) = 0$.
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
 - Ecris les solutions de l'équation (E) sous forme trigonométrique et exponentielle
 - Construis dans un repère orthonormé, les images, A , B , C des solutions de l'équation (E) .
 - Calcule les distances, AB , AC et BC puis en déduis la nature du triangle ABC .

