

PROBLEME RESOLU : NOMBRES COMPLEXES ET LIEUX GEOMETRIQUES

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On note A et B les points d'affixes respectives $-3 + 2i$ et $5 - 3i$.

On considère l'application f qui à tous points M différents de B et ayant pour affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z + 3 - 2i}{z - 5 + 3i}$$

Interpréter géométriquement le module de z' puis l'argument de z' .

Déterminer $Re(z')$ et $Im(z')$ en fonction de $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$.

Déterminer puis construire les ensembles suivants :

E_1 ensemble des points M tels que $|z'| = 1$

E_2 ensemble des points M tels que z' soit un réel.

E_3 ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur

E_4 ensemble des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

Interpréter géométriquement le module puis l'argument de z' :

$$\begin{aligned} \arg(z') &= \arg\left(\frac{z + 3 - 2i}{z - 5 + 3i}\right) [2\pi] = \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) [2\pi] \\ &= \arg(z - z_A) - \arg(z - z_B) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) - (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) \\ &= (\overrightarrow{BM}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) [2\pi] = (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) [2\pi] \end{aligned}$$

$$|z'| = \left| \frac{z + 3 - 2i}{z - 5 + 3i} \right| = \left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{AM}{BM}$$

Déterminer $Re(z')$ et $Im(z')$ en fonction de $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$:

$$\begin{aligned}
 z' &= \frac{z+3-2i}{z-5+3i} = \frac{x+iy+3-2i}{x+iy-5+3i} = \frac{x+iy+3-2i}{(x-5)+i(y+3)} = \frac{[x+iy+3-2i] \times [(x-5)-i(y+3)]}{[(x-5)+i(y+3)] \times [(x-5)-i(y+3)]} \\
 &= \frac{[x+iy+3-2i] \times [x-5-iy-3i]}{(x-5)^2 + (y+3)^2} \\
 &= \frac{x^2 - 5x - ixy - 3ix + ixy - 5iy - i^2y^2 - 3i^2y + 3x - 15 - 3iy - 9i - 2ix + 10i + 2i^2y + 6i^2}{(x-5)^2 + (y+3)^2} \\
 &= \frac{x^2 - 5x - 3ix - 5iy + y^2 + 3y + 3x - 15 - 3iy - 9i - 2ix + 10i - 2y - 6}{(x-5)^2 + (y+3)^2} \\
 &= \frac{x^2 + y^2 - 2x + y - 21}{(x-5)^2 + (y+3)^2} + i \frac{-5x - 8y + 1}{(x-5)^2 + (y+3)^2}
 \end{aligned}$$

On a donc $x' = \frac{x^2+y^2-2x+y-21}{(x-5)^2+(y+3)^2}$ et $y' = \frac{-5x-8y+1}{(x-5)^2+(y+3)^2}$

Déterminer E_1 ensemble des points M tels que $|z'| = 1$

a) Méthode algébrique

$$|z'|^2 = \left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right|^2 = 1$$

$$|z - z_A|^2 = |z - z_B|^2$$

$$|x + iy + 3 - 2i|^2 = |x + iy - 5 + 3i|^2$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2$$

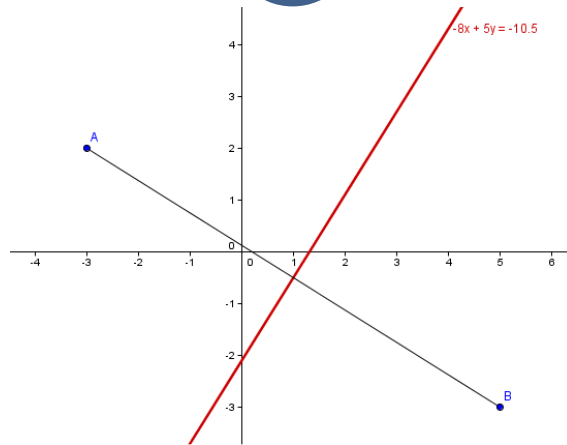
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9$$

$$16x - 10y - 21 = 0$$

L'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$ est donc la droite d'équation $16x - 10y - 21 = 0$

b) Méthode géométrique

$|z'| = \frac{AM}{BM} = 1$ donc $AM = BM$. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$



Déterminer E_2 ensemble des points M tels que z' soit réel

a) Méthode algébrique

$$y' = 0$$

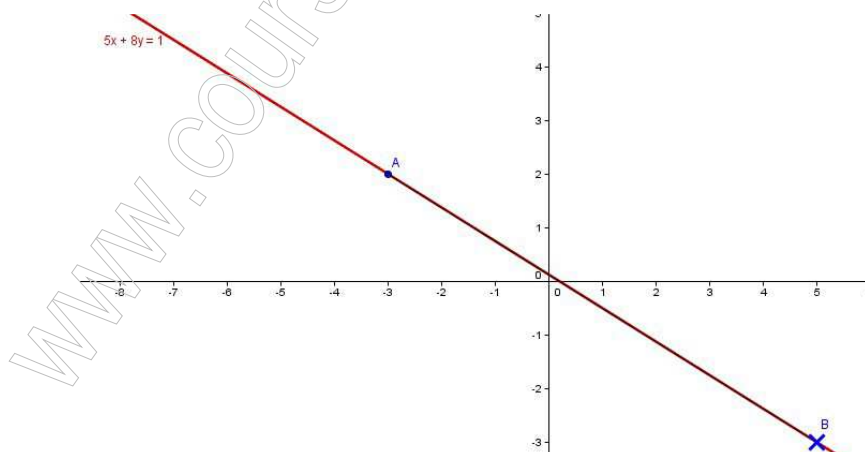
$$\frac{-5x - 8y + 1}{(x - 5)^2 + (y + 3)^2} = 0$$

L'ensemble cherché est donc la droite d'équation $-5x - 8y + 1 = 0$ privée du point $B(5 ; -3)$

b) Méthode géométrique

$$\arg(z') = 0[\pi] \leftrightarrow (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) = 0[\pi]$$

L'ensemble cherché est donc la droite (AB) privée du point B



Déterminer E_3 ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur

a) Méthode algébrique

$$\begin{aligned} x' &= 0 \\ \frac{x^2 + y^2 - 2x + y - 21}{(x-5)^2 + (y+3)^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y - 21 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + y - 21 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 21 = 0$$

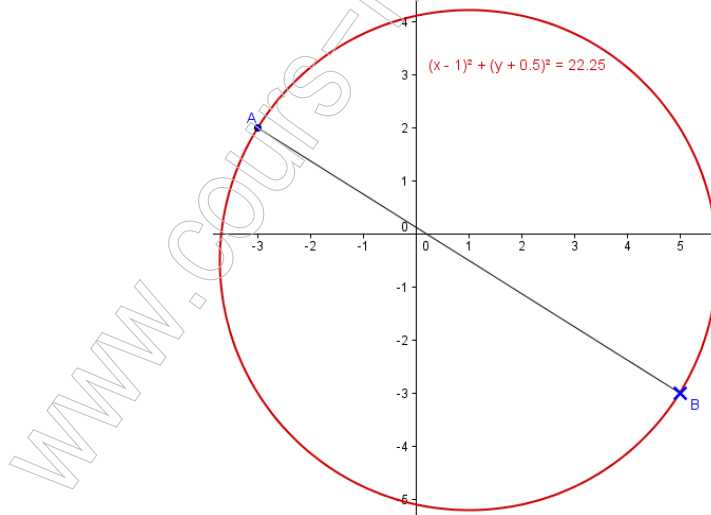
$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{89}{4}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{2}$

b) Méthode géométrique

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2} [\pi] \leftrightarrow (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Le triangle MAB est donc rectangle en M. Le triangle MAB est donc inscrit dans le cercle de diamètre [AB].
L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre [AB] privé du point B.



Déterminer E_4 ensemble des points M tels que z' soit un réel strictement négatif

a) Méthode algébrique

$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2-2x+y-21}{(x-5)^2+(y+3)^2} < 0 \\ \frac{-5x-8y+1}{(x-5)^2+(y+3)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y - 21 < 0 \\ -5x - 8y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{89}{4} \\ -5x - 8y + 1 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble cherché est donc le segment $[AB]$ privé des points A et B

b) Méthode géométrique

$$\arg(z') = \pi[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) = \pi[2\pi]$$

M est donc entre A et B. L'ensemble cherché est donc le segment $[AB]$ privé des points A et B.

