
Série complexe 2425

Exercice 1 :

1. Déterminer le module et un argument de chacun des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{-1}{1+i}; \quad z_2 = \frac{3}{1-i}; \quad z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}; \quad z_4 = \frac{14(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{1-i\sqrt{3}}.$$

2. Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{-\sqrt{3} + i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4i}{1 - i\sqrt{3}}.$$

- a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .
b. En déduire la forme algébrique de :

$$z_1 \cdot z_2; \quad \frac{z_1}{z_2}; \quad z_1^3; \quad z_2^6 \cdot \frac{z_1^5}{z_2^4}.$$

3. a. Calculer le module et un argument du nombre complexe

$$z = \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}}.$$

- b. Calculer le module, un argument, les parties réelle et imaginaire du nombre complexe

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

4. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

- a. Calculer le module et un argument de z_1 et z_2 .
b. Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le produit $z_1 \cdot z_2$.
c. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

5. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes ci-dessous ; puis les écrire sous la forme trigonométrique $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= -2(\sin x + i \cos x) \\ z_2 &= -3e^{-\frac{2\pi}{3}i} \\ z_3 &= \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2 \cos 3x - 2i \sin 3x}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Soit A le point d'affixe $z = -1 + 2i$.
a. Placer dans le plan complexe les points B, C, D d'affixes respectives $-2z_A, z_A^2; -z_A^2$.
b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Soient ABC trois points d'affixes $z_A = 1 - 2i; z_B = 5 - i$ et $z_C = 2 + 4i$.
Calculer les affixes des points D, E, F pour que $ABCD, BCAE, CABF$ soient des parallélogrammes.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que :
-

- a.) $|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$.
 b.) $\left| \frac{z-2i}{z+1+i} \right| = 1$.
 c.) $\frac{z+2}{z-5} - 3 \in \mathbb{R}$.
 d.) $z + \bar{z} - 1 = |z|$.
 e.) $\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}$.

Exercice 3 : Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application

$$f : \mathbb{C} - \{-2 - i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = \frac{z+1-2i}{z+2+i}$$

1. Représenter dans $\mathcal{P}$ le point A d'affixe $-3 + i$. Calculer $f(-3 + i)$ et représenter son image A' dans $\mathcal{P}$.
2. Déterminer et représenter dans $\mathcal{P}$ l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.
3. Déterminer et représenter dans $\mathcal{P}$ l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tel qu'un argument de $f(z)$ soit $\frac{\pi}{2}$.

Préciser $E_1 \cap E_2$.

Exercice 4 :

1. a. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$8 + 6i; \quad 3 + 4i; \quad -4; \quad 3i; \quad 24i - 7; \quad -3 - 4i.$$

- b. Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants :

$$1 + i; \quad 1 - i\sqrt{3}; \quad -4i.$$

- c. Déterminer les racines cinquièmes de

$$\frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\text{a.) } (1 - 2i)z + 1 + 4i = 0; \quad \text{b.) } z - 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|; \quad \text{c.) } |z| - 2z = 1 - 2i;$$

$$\text{d.) } 2z + \bar{z} = 3 - 4i; \quad \text{e.) } \frac{z+1}{z-1} = 1 + i; \quad \text{f.) } -i(1+5i)z + (z-1)(i-2) - 2 = 3z - i.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - 2z + 4 = 0; \quad z^2 - z + 1 = 0; \quad 2z^2 - (1 - 2i)z + i - 1 = 0$$

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5(1 + i) = 0; \quad z^2 - iz + \sqrt{3}i = 0$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivantes :

$$-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) - 13 = 0$$

(On posera $Z = \frac{z-3i}{z+2}$ et on résoudra $-Z^2 + 6Z - 13 = 0$).

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = 17 \end{cases} ; \quad \begin{cases} iz_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = -1 \\ 2z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} \end{cases} ; \quad \begin{cases} z_1z_2 = 17 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2z_1z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$$

6. Soit l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^3 + 3iz^2 + (6 + 6i)z + 8 - 14i \end{aligned}$$

a. Calculer $f(1 + i)$.

b. Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}; \quad f(z) = 0$.

7. Soit l'équation

$$(\mathbf{E}) : z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + (2i - 11)z^2 + (25 - 19i)z - 8(1 - 3i) = 0.$$

Résoudre $(\mathbf{E})$ sachant qu'elle admet une racine réelle.

8. Soit l'équation

$$(\mathbf{E}') : z \in \mathbb{C}, \quad z^3 + 3(i - 1)z^2 + (-8i + 3)z - 3 + 9i = 0.$$

Résoudre $(\mathbf{E}')$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

9. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0.$$

a. Démontrer que cette équation admet une racine réelle. En déduire les autres solutions dont on donnera la forme trigonométrique.

b. Démontrer que ses racines sont les éléments d'une suite géométrique dont on donnera la raison complexe.

10. 1. Vérifier que $(1 + i)^2 = 2i$ puis résoudre l'équation : $z^2 - 2i = 0$.

2. Déterminer toutes les suites géométriques (U) telles que $U_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $U_4 = -\sqrt{3} + i$. On considère celle de ces suites dont la raison à une partie réelle positive. Calculer U_{19} , donner son module, un argument et sa forme algébrique.

11. Soit z et Z les complexes définis par :

$$z = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}; \quad Z = z^4.$$

Déterminer les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique. En déduire $\cos \frac{\pi}{11}$ et $\sin \frac{\pi}{11}$.

12. Résoudre sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$$u^2 - (3 - 2i)u + 2 - 2i = 0 \tag{1}$$

$$z^4 - (3 - 2i)z^2 + 2 - 2i = 0 \tag{2}$$

Pour (1), on donnera les solutions sous forme algébriques.

Pour (2), on calculera le module et l'argument de chaque solution.

13. Soit α un nombre réel appartenant à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation

$$(\mathbf{E}) : (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha).$$

1. Soit z une solution de **(E)**.

Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$. En déduire que z est un nombre réel.

2. a. Exprimer $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b. Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan \varphi$ avec $\varphi \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Montrer que **(E)** équivaut à une équation d'inconnue φ , et la résoudre.

c. Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de **(E)**.

Exercice 5 : On considère l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^4 - z^3 + z^2 + 2 \end{aligned}$$

1. a. Montrer que si l'équation **(1)** : $z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$ admet pour racine le nombre complexe α , elle admet aussi pour racine $\bar{\alpha}$.

b. Montrer que $1 + i$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont solutions de **(1)**.

c. Quel est l'ensemble solution de l'équation **(1)**.

En déduire une factorisation de $f(z)$.

2. Montrer que f est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Exercice 6 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

3. On pose $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$. En posant $Z = z + \frac{1}{z}$, exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z . En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$

Exercice 7 : Résoudre l'équation :

$$z \in \mathbb{C} \quad z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0$$

où θ est un paramètre réel.

En discutant selon les valeurs de θ , on écrira les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous la forme trigonométrique.

Exercice 8 : $\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes ; on considère l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 - (2 + \sqrt{3} + i)z^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + i)z - 2 - 2i.$$

1. Vérifier, de deux façons différentes, que $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = (z - 1 - i)[z^2 - (\sqrt{3} + 1)z + 2].$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** : $f(z) = 0$.

Indication : On remarquera que le discriminant du trinôme est égal à $-(\sqrt{3} - 1)^2$.

3. Représenter dans le plan complexe $\mathcal{P}$ les points A, B, C , images des solutions de l'équation **(E)** (Unité sur le graphique : 4 cm).

Montrer le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 9 : On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = z^3 + (5 - 4i)z^2 - (1 + 15i)z - 20 + 4i.$$

1. Montrer que l'équation **(E)** : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation **(E)**. On désignera les solutions de **(E)** par z_1, z_2 et z_3 avec $|z_2| < |z_3|$ et par M_1, M_2 et M_3 les points images respectives de z_1, z_2 et z_3 dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Représenter les points M_1, M_2 et M_3 . Montrer que

$$\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = i.$$

En déduire que $M_1M_2M_3$ est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 10 :

1. Résoudre l'équation **(E)** : $z \in \mathbb{C}, z^2 - 2\bar{z} = 0$.
2. Dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$, les points O, A, B, C sont les images des solutions de **(E)**.

Montrer que A, B, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre.

Exercice 11 : On considère dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i; \quad b = 1 + (1 + \sqrt{3})i; \quad c = (1 + \sqrt{3})i.$$

- a.) Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$a - b; \quad c - a \text{ et } c - d.$$

- b.) En déduire la nature du triangle ABC .

(Bac SBT 2007)

Exercice 12 : Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère les nombres

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 11 + (11\sqrt{3} - 2)i}{2 + 11i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 2i}{3 - i}.$$

1. a.) Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
b.) Déterminer le module et un argument de chacun des complexes z_1 et z_2 .
2. On pose $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
a.) Écrire Z sous forme trigonométrique puis algébrique.
b.) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.
c.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = 2$. (Bac MTE 2007)

Exercice 13 : $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et M un point du plan complexe d'affixe $m = a + ib$ où a et b sont des réels. On considère l'équation :

$$(E_m) : z^3 + (2 - i)z^2 + (m^2 + 1 - 2i)z - i(1 + m^2) = 0.$$

- 1.) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) après avoir vérifié qu'elle admet pour racine $z_0 = i$.
- 2.) Trouver l'ensemble (Γ) des points M d'affixe $m = a + ib$ tels que l'équation (E_m) admette au moins deux racines de même module. Représenter l'ensemble (Γ) .

Exercice 14 :

1. Soit z un nombre complexe, et

$$P(z) = z^4 - 8(1+i)z^3 + 48iz^2 + 64(1-i)z - 80$$

- a) Vérifier que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 et une solution imaginaire pure z_1 . Les calculer.
b) Déterminer a, b complexes tels que :

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 + az + b).$$

Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

2. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soit les points $A(2, 0)$; $B(0, 2)$; $C(2, 4)$; $D(4, 2)$.

Déterminer G l'isobarycentre de A, B, C, D et $\mathcal{R}$, rotation de centre G dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. Vérifier que $\mathcal{R}(A) = D$, $\mathcal{R}(D) = C$, $\mathcal{R}(C) = B$, $\mathcal{R}(B) = A$.

Exercice 15 :

1. Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9$$

- a. Calculer $P(3)$.
b. Montrer que, pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3)(z^2 - 4iz - 3).$$

- c. On pose $z = u + 2i$.
Écrire $z^2 - 4iz - 3$ sous la forme $Q(u)$, avec Q un polynôme de degré 2.
d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(u) = 0$.
e. Dédire des questions précédentes les solutions de l'équation : $P(z) = 0$ (1).
2. On note z_1, z_2 et z_3 les solutions de l'équation (1) de façon que :

$$\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2 < \operatorname{Im} z_3$$

et on désignera par A, B et C leurs images respectives dans le plan.

- a. Placer les points A, B et C dans un repère, ainsi que le point D d'affixe $4 + i\sqrt{3}$.
b. Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer les affixes des points B' et C' , images des points B et C par R .
c. Montrer que le quadrilatère $AB'C'D$ est un parallélogramme.

Exercice 16 :

1. Dans chacun des cas suivants, reconnaître l'application dont l'écriture complexe est :

$$\text{a.) } z' = z + 2i + 1; \quad \text{b.) } z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z; \quad \text{c.) } z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)z;$$

$$\text{d.) } z' = 2iz + 1; \quad \text{e.) } z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}.$$

(On donnera les éléments caractéristiques.)

2. Quelle est la transformation F du plan dont l'écriture complexe est

$$z' = \frac{1}{2}(1+i)z.$$

Quelle est l'image par F de la droite d'équation $y = x$?

Exercice 17 : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit les points $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$; $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ et $C(0; -1)$.

On considère l'application s du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i\sqrt{3})z$.

- Déterminer les affixes des points A' , B' et C' images respectives des points A , B et C par s .
- Construire dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points A , B , C et leurs images A' , B' , C' par s . (Bac SBT 2007)

Exercice 18 : Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ on considère les points A_1 , A_2 et A_3 d'affixes respectives $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 3 - 2i$.

- Démontrer qu'il existe une similitude directe s telle que $s(A_1) = A_2$ et $s(A_2) = A_3$. Caractériser s .
- Soit la transformation T qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' :

$$z' = (1 - i)z + 2 + i.$$

- Caractériser géométriquement cette transformation.
- Déterminer le point B dont le transformé B' par T est la symétrique de B par rapport à O .

Exercice 19 : Soit A , B , C , et D les points d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i$, $Z_B = 2 - i$, $Z_C = -2 + i$ et $Z_D = -1 + 4i$.

- Déterminer l'écriture complexes de la similitude directe s qui transforme A en C et B en D .
- Déterminer les éléments caractéristiques de s .

Exercice 20 :

- On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la transformation ponctuelle qui, au point M de coordonnées x , y fait correspondre le point M' de coordonnées x' , y' tel que

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 3. \end{cases}$$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ les nombres complexes associés à ces points. En exprimant z' en fonction de z , montrer que cette transformation est une similitude directe dont précisera le centre, le rapport et l'angle.

- Dans le plan complexe $\mathcal{P}$, on considère la transformation ponctuelle $\mathcal{S}$ qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' , définie par

$$z' = (1 - i)z - 2.$$

- Montrer que la transformation $\mathcal{S}$ est une similitude. Quels sont les transformés par $\mathcal{S}$ des points O et A d'affixes respectives 0 et $(1 + i)$?
- On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Calculer x' et y' en fonction de x et y . Déterminer la transformation réciproque $\mathcal{S}^{-1}$ de $\mathcal{S}$.

-
- c. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe du plan $\mathcal{P}$, d'équation $xy = 1$. Quelle est la transformée $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la similitude $\mathcal{S}$?
3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 4i$, $z_C = 4 - i$. Soit Σ , définie par $z' = az + b$, une similitude du plan complexe, où z' désigne l'affixe de l'image par Σ du point d'affixe z .

Montrer que l'on peut déterminer les nombres complexes a et b de façon que l'image de B par Σ soit A et que l'image de C par Σ soit B .

Trouver le point double (centre), le rapport et l'angle de cette similitude.

Exercice 21 : Soit f l'application définie dans $\mathbb{C}$ par $z' = 3i\bar{z} + 2$. Caractériser géométriquement la transformation f qui, à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' .

Même questions pour : $z' = (1+i)\bar{z} + \sqrt{2}$, $z' = (1-i)\bar{z} + i\sqrt{2}$, $z' = i\sqrt{3}\bar{z} + 2i$, $z' = (1+i)\bar{z} + i - 1$

Exercice 22 : On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout nombre complexe z , associe $z' = f(z) = 2i\bar{z} + 2 - i$, $\bar{z}$ désignant le nombre complexe conjugué de z .

On désigne par F la transformation du plan complexe, qui au point M d'affixe z , fait correspondre le point $M' = F(M)$, d'affixe $z' = f(z)$

- 1) La transformation f admet-elle des points invariants?
- 2) Déterminer la nature de F et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent : centre, rapport, axe.

Exercice 12 :