

Série d'Exercices Nombre Complexe et Similitude Plane

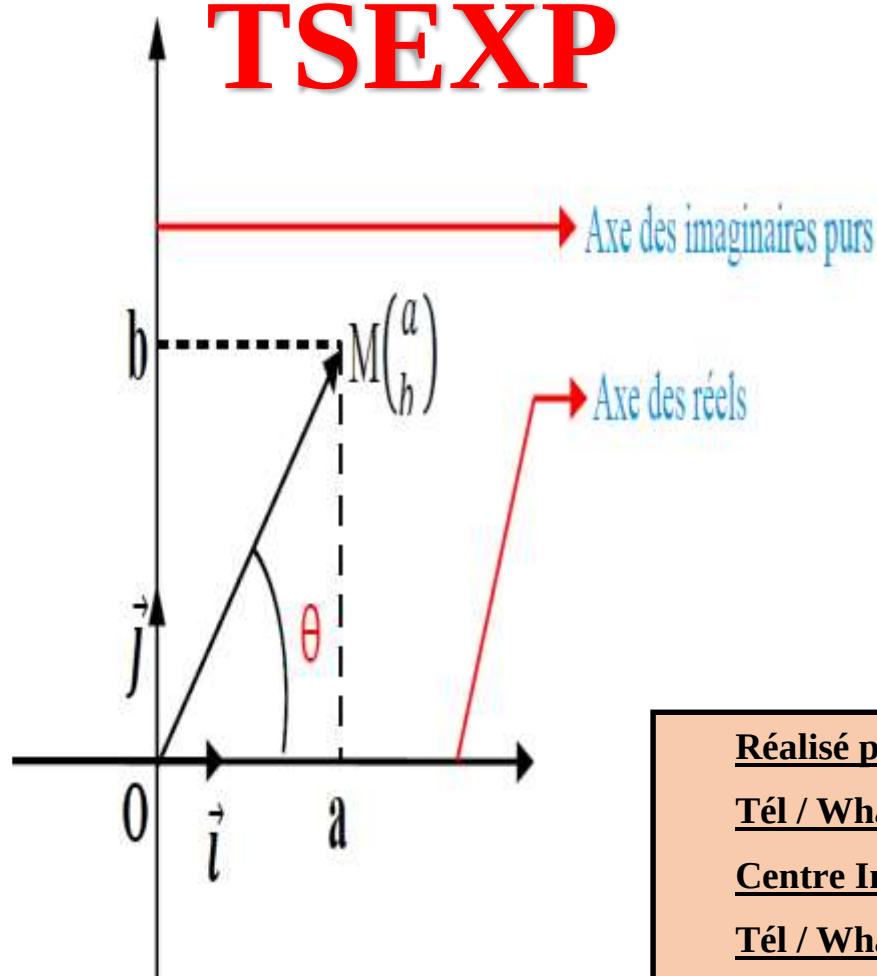
COLLECTION KOFFIMATH



TSEXP

TSEXP

TSEXP



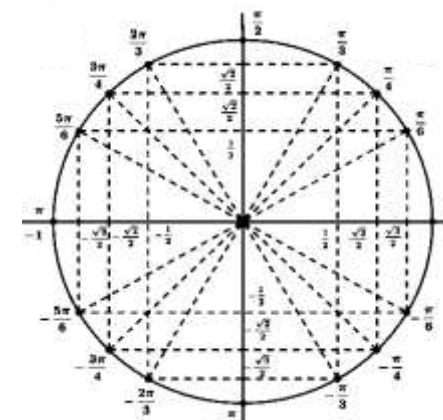
Transformations	Ecriture complexes
Translation de vecteur d'affixe b	$z' = z + b$
Homothétie de centre Ω et rapport $K \neq 0$ et $k \neq 1$	$z' = kz + b ; b \in \mathbb{C}$ ou $z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$
Rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ	$z' = e^{i\theta} z + b$ ou $z' - z_{\Omega} = e^{i\theta} (z - z_{\Omega})$
Similitude plane direct de rapport $ a $	$z' = az + b ; a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$

Réalisé par : M. KOFFIMATH

Tél / WhatsApp : +223 60 62 93 65

Centre Informatique : Collection Soro

Tél / WhatsApp : +229 95 20 25 49



Dans les exercices, on considère un nombre complexe et un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

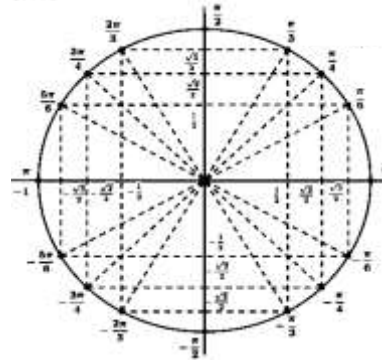
Application sur les nombres complexes

Bref Résumé

- ✓ On appelle forme algébrique d'un nombre complexe z la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, et i est le nombre tel que $i^2 = -1$.
- ✓ Soit $z = a + ib$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe; on appelle conjugué de z le nombre complexe $a - ib$ noté $\bar{z}$.
- ✓ On appelle le module du nombre complexe $z = a + ib$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le réel positif noté $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Interprétation géométrique :** Dans un repère orthogonal $(0, \vec{u}, \vec{v})$
 - Si z est l'affixe d'un point M alors le module $|z|$ représente la distance OM soit $|z| = OM$;
 - Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B alors :
 $AB = |z_A - z_B|$ et l'affixe du vecteur est $\vec{z}_{AB} = z_B - z_A$.
- ✓ Soit $z = a + ib$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et un argument de z est θ noté $\arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
- θ vérifie le système suivant :
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Tableau de trigonométrie

Degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$x(\text{radian})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\text{Sin}x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\text{Cos}x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



- ✓ Tout nombre complexe z non nul dont un argument est θ peut se mettre sous la forme :
 - $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$: c'est la **forme trigonométrie de z** .
 - $z = |z|e^{i\theta}$: c'est la **forme exponentielle de z** .
 - $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$: c'est la **formule d'Euler**.
 - $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$;
 - $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

- ✓ Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, on peut procéder comme suit :
 - On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
 - On détermine les racines carrées de Δ
 - Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{-b}{2a}$
 - Si $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ avec δ une racine carrée de Δ
 - On peut appliquer $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$ dans le cas où $\Delta = iy$; $y \in \mathbb{R}$

Résolution d'équation de n degré dans $\mathbb{C}$

Pour résoudre une équation $(E) : P(z) = 0$ de degré n dans $\mathbb{C}$, on peut procéder comme suit :

- Si (E) admet de solution réel, on pose $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- Si (E) admet de solution imaginaire pure, on pose $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $P(iy) = 0$.
- Si (E) admet de solution dont le point-image appartient à la droite d'équation $y = x$ (**1^{ère} bissectrice**), on pose $z = x + ix$ avec $x \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $P(x + ix) = 0$.
- Si (E) admet de solution dont le point-image appartient à la droite d'équation $y = -x$, on pose $z = x - ix$ avec $x \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $P(x - ix) = 0$.
- Si (E) admet de solutions conjuguées ; on pose $z = x + iy$ et $\bar{z} = (x - iy)$.

❖ **Racine n^{ième} d'un nombre complexe**

On appelle racine n^{ième} d'un nombre complexe

z, tout nombre complexe u tel que $z = u^n$;

Si $z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$u_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha + 2k\pi}{n})}$ avec $k = \{0; 1; 2; 3; \dots; n-1\}$; $r = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$.

Série d'exercices

Exercice 1 : Détermine les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i ; z_2 = -1 + i\sqrt{3} ; z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \\ z_4 &= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i ; z_5 = 3 + i\sqrt{3} ; z_6 = 2i ; z_7 = -3 ; \\ z_8 &= -4 + 4i ; z_9 = -\sqrt{3} + 3i ; z_{10} = 1 - i ; \\ z_{11} &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} ; z_{12} = 2 ; z_{13} = 2 + 2i ; \\ z_{14} &= 3 + 3i ; \\ z_{15} &= \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} ; \\ z_{16} &= \frac{x^2 + y^2 + 3x - 3y + 2}{(x-1)^2 (y-3)^2} + \frac{3x - y + 6}{(x+1)^2 (y-3)^2} i \end{aligned}$$

Exercice 2 : Ecris sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous :

$$\begin{aligned} z_1 &= (2 - 6i)^2 ; z_2 = \frac{3+i}{1-i} ; z_3 = \frac{3i}{2i-1} \\ z_4 &= \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 ; z_5 = (2-i)^5 \text{ et} \\ z_6 &= (2 - 6i\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}i - 1\right) \end{aligned}$$

Exercice 3 : On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = 1 + i$.

Ecris sous forme algébrique : $z_1 + z_2$;

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 ; z_1 \times z_2 ; z_2^1 ; \frac{1}{z_2} ; \\ \frac{z_1}{z_2} ; z_1 - 2z_2 ; \frac{z_2}{z_1 - z_2} ; \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} . \end{aligned}$$

Exercice 4 : Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} a) z &= (1 + i)(1 - 2i) ; b) z = \frac{1+i}{-1+i} ; \\ c) z &= \frac{8}{-1+i\sqrt{3}} ; d) z = \frac{1}{-\sqrt{3}+i} ; \\ e) z &= (1 + i)^2(3 - 2i) ; \\ f) z &= (1 + i\sqrt{3})^3 ; g) z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} ; \\ h) z &= \frac{(1-i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3} ; i) z = (2 - 2i)^3(\sqrt{3} - i)^4 ; \\ j) z &= \left(\frac{1+i}{3+2i}\right)^2 ; k) z = (1 - i)^3 \times i^{11} ; \\ l) z &= \frac{3+i}{2+5i} ; m) z = \frac{i}{2+3i} ; n) z = (1 + i)^{10} ; \\ o) z &= \frac{3i+2}{5+3i}(2 - 3i) ; p) z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2i} ; \\ q) z &= i^{2003} ; r) z = i^{34} ; s) z = i^{1984} ; \\ t) z &= i^{2045} ; u) z = i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28} ; \\ v) z &= \sum_{k=0}^{2000} i^k . \end{aligned}$$

Exercice 5 : Déterminer la forme algébrique de l'inverse des complexes suivants :

$$z_1 = 2 - 2i ; z_2 = -2 + 4i ;$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_4 = \frac{1}{2}i$$

Exercice 6 : Soit un nombre réel. On considère le nombre complexe défini par : $z = (x + 2i)(1 - xi)$.

- 1) Détermine l'écriture algébrique du nombre complexe z
- 2) a) Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un nombre réel ?
b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un imaginaire pur ?

Exercice 7 : Soient $z_1 = -6$; $z_2 = 5i - 2\sqrt{7}$;
 $z_3 = \frac{3-2i}{2-3i}$ et $z_4 = \frac{(2-3i)(3+4i)}{(1-i)(1+2i)}$

Calcul : $\bar{z}_1$; $\bar{z}_2$; $\bar{z}_3$ et $\bar{z}_4$

Exercice 8 :

1. Déterminer le module des complexes suivants : $z_1 = 4 + 4i$; $z_2 = 1 + 2i$;
 $z_3 = 3 - i$; $z_4 = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$; $z_5 = (1 + 3i)^2$;
 $z_6 = \frac{(2+3i)^2}{(2-i)^5}$; $z_7 = (1 - i)(2 + i)^2$ et
 $z_8 = \cos \theta + \sin \theta$
2. On pose $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + 2i$.
Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes : $A = z_1 - \bar{z}_2$; $B = z_1 \bar{z}_2$ et
 $C = \frac{z_1}{z_2} - \bar{z}_2$

Exercice 9 :

- A) soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1 et soit $z = \frac{z+i}{z+1}$
Détermine puis construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :
- $|z| = 1$
 - z est un imaginaire
 - z est un réel
- B) Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M du plan tel que :
- $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$
 - $|z - 3i| = 2$
 - $|z - 2 + i| = 1$

Exercice 10 : Soit un nombre complexe

distinct de et soit $z = \frac{z+1}{z-2i}$.

Détermine puis construis l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

- $|Z| = 1$.
- z est un imaginaire pur.
- z est un réel.
- Z est un argument égale à $\frac{\pi}{2}$
- Z est un réel strictement positif.

Exercice 11 : Détermine un angle α tel que :

- $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$;

Exercice 12 : Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i ; z_2 = -1 + i\sqrt{3} ; z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i ; z_5 = 3 + i\sqrt{3} ; z_6 = 2i ;$$

$$z_7 = -3 ; z_8 = (-4 + 4i)^2 ;$$

$$z_9 = (-\sqrt{3} + 3i)^2 ; z_{10} = (1 - i)(\sqrt{3} + i) ;$$

$$z_{11} = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3} ; z_{12} = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$$

Exercice 13 : Déterminer un argument de chacun des nombres complexes définis par :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} ;$$

$$z_3 = 16(-\sqrt{3} + i) ; z_4 = i(\sqrt{6} - i\sqrt{2}) \text{ et}$$

$$z_5 = (-1 - i)^4$$

Exercice 14 : Soient $z_E = 1$; $z_F = 2i$;

$z_G = 3 + i$ et z_H l'affixe du point H est image par le point F de la symétrie de centre du point E.

- Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_H - z_G}{z_F - z_G}$
- En déduire :
 - le module de $\frac{z_H - z_G}{z_F - z_G}$;
 - un argument de $\frac{z_H - z_G}{z_F - z_G}$;
 - ainsi qu'une interprétation géométrique de $\frac{z_H - z_G}{z_F - z_G}$

Exercice 15 : Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants et représenter dans le plan complexe les points images :

$$z_1 = -4 + 4i; \quad z_2 = 2 - \sqrt{3} - i;$$

$$z_3 = (1 - i)(\sqrt{3} + i) \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$$

Exercice 16 : Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2 et z définis par : $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 17 : Linéariser chacune des expressions suivantes :

$$z_1 = \cos^4 x; \quad z_2 = \sin^5 x;$$

$$z_3 = \cos^3(2x) \quad \text{et} \quad z_4 = \cos^2 x + \sin^3 x$$

Exercice 18 : Soit les complexes suivants :

$$z_1 = 1; \quad z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$$

1. Donne l'écriture trigonométrique des complexes $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$
2. Donne l'écriture trigonométrique et algébrique de $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

3. Dédus-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 19 : Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- 1) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
- 2) $z_2 = -3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
- 3) $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
- 4) $z_4 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- 5) $z_5 = \cos\theta - i\sin\theta$
- 6) $z_6 = \sin\theta + i\cos\theta$

Exercice 20 :

- 1) Calcule $A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{36}$
- 2) Ecris sous forme algébrique $z = \left(\frac{2}{-\sqrt{3}+i}\right)^{2007}$

Exercice 21 : Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes définis ci-dessous :

$$z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}; \quad z_2 = (\sqrt{3} + i)(-1 + i\sqrt{3});$$

$$z_3 = (-1 - i)i \quad \text{et} \quad z = \sqrt{3} + i;$$

En déduire z^{1996}

Exercice 22 : On donne $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$ et $B = -5(1 + i\sqrt{3})$.

- 1) Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $A, \bar{A}, B, \frac{1}{A}, A \times B, \frac{B}{A}$ et $\frac{A}{B^2}$.
- 2) Soit Z un nombre complexe tel que $AZ = B$.
 - a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.
 - c) Calcule $(Z)^{2008}$

Exercice 23 : On pose : $Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

- 1) Met sous forme trigonométrique , Z' et $\frac{Z}{Z'}$.
- 2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
 - a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{6} + 2)\cos x + (\sqrt{6} - 2)\sin x = 2$.
 - b) Place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 24 : On considère le nombre complexe :
 $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

- 1) Ecris z^2 sous forme algébrique.
- 2) Détermine le module et un argument de z^2 .
 En déduis le module et un argument de z .
- 3) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de :
 $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation :
 $(\sqrt{3} + 2) \cos x + (\sqrt{6} - 2) \sin x = 2$ et place
 les points images des solutions sur le cercle
 trigonométrique.

Exercice 25 : Détermine puis construis :

- 1) L'ensemble (Γ) des points M d'affixes tels
 que : $|z - i| = 2$.
- 2) L'ensemble (λ) des points M d'affixes tels que :
 $|z + 1 - 2i| = |z - 1 - i|$.
- 3) L'ensemble (H) des points M d'affixes tels que :
 $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 6$.
- 4) L'ensemble (G) des points M d'affixes tels que :
 $|iz - 1| = |-z + 2 - i|$.
- 5) L'ensemble (R) des points M d'affixes tels que
 : $|2iz + 2 + i| = 3$.
- 6) L'ensemble (φ) des points M d'affixes tels que :
 $\arg(z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6}k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- 7) L'ensemble (ω) des points M d'affixes tels
 que : $\arg(3\bar{z} - 1 + i) = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 8) L'ensemble (E) des points M d'affixes tels
 que : $\arg\left(\frac{z+2i}{z+1-3i}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 9) L'ensemble (I) des points M d'affixes tels que
 : $\arg(iz - 1 + 2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 10) L'ensemble (S) des points M d'affixes tels
 que : $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 11) L'ensemble (F) des points M d'affixes tels
 que : $|\bar{z} + 1 + 2i| \leq 1$
- 12) L'ensemble (O) des points M d'affixes tels
 que : $1 \leq |z + 1| \leq 2$.

Exercice 26 : On considère les points A
 d'affixe $3 + i$ et I d'affixe 1.

- 1) On note B le symétrique de A par rapport
 au point O, détermine l'affixe de B.
- 2) On note C le symétrique de A par rapport au
 point I, détermine l'affixe de C.
- 3) On note D le symétrique de A par rapport à
 (OJ), détermine l'affixe de D.
- 4) On note E le symétrique de A par rapport au
 point (OI), détermine l'affixe de E.

Exercice 27 : Complete le tableau ci-après :

Forme algébriques de z	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Forme trigonométri ques de z			$2 \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right]$
Forme exponentiell es de z		$e^{i(\frac{5\pi}{6})}$	

Exercice 28 : Complete le tableau ci-après :

Formes algébriques de Z	$2\sqrt{3} - 2i$		
Formes trigonométriques de Z		$2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]$	
Formes exponentielles de Z			$4e^{i(\frac{\pi}{2})}$

Exercice 29 : Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $2iz - 3 = z + i$; b) $\frac{z-1}{iz+3} = 4i$;
- c) $3z - 5 + 2zi = 2i - 3z + 4iz$;
- d) $(z + 4)(6 - 2i) = (3 + 2i)$;
- e) $(2 + 3i)(z - 5 + 2i) = 3z + 4i$;
- f) $6 + 2i - 4iz = 3z + 2$;
- g) $2z - 3 + 4i = 5 + i$.

Exercice 30 : Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $iz - 3 = 2\bar{z}$; b) $3\bar{z} - 2iz = 2 - 3i$;
 c) $iz + 2\bar{z} = i - 1$;
 d) $z + (1 + 3i)\bar{z} = 5 + 3i$;
 e) $z - 2 + i + z + i - 1 = 0$;
 f) $z^2 - \bar{z} + 1 = 0$; g) $iz^2 - 2\bar{z} - i = 0$;
 h) $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$.

Exercice 31 : Détermine les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes suivants :

$45 + 28i$; $-5 + 12i$; $8 - 6i$; $120 - 22i$;
 $-2i$; $8i$; $4614\sqrt{3}i$; -3 ; $6 + 6i\sqrt{3}$; $-724i$.

Exercice 32 : Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$(E_1): z^2 = 8i$ $(E_2): z^2 + 1 = 0$
 $(E_3): z^2 = 40 - 42i$ $(E_4): z^2 - 2i\bar{z} = 0$
 $(E_5): z^2 - 4(1 + i)z + 8 + 14i = 0$

Exercice 33 : On considère l'équation suivante d'inconnue z ,

$(E): z^2 - (1 + \sqrt{3} + 2i)z + \sqrt{3} - 1 + i(1 + \sqrt{3}) = 0$

1. Calcule $(1 - \sqrt{3})^2$
2. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .

Exercice 34 : On considère dans $\mathbb{C}$ le nombre complexe u tel que $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

1. Calculer les racines carrées de u
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 + 2iz + i\sqrt{2} = 0$ (On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation)
3. Montrer que $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| = \sqrt{2}$

Exercice 35 : θ est un réel quelconque , on considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$E(\theta): z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives :
 $z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_C = \bar{z}_B$; $z_D = \bar{z}_A$.
- a) Détermine les formes algébriques des affixes des points puis placer les points dans le repère
- b) Détermine la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD
- c) Déduis-en que ces points appartiennent à un cercle (Γ) dont on donnera une équation.
- 3) a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(\theta)$
 b) démontre que les points ont pour affixes les solutions $E(\theta)$ sont les points de (Γ) .

Exercice 36 : Le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

- 1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$
- 2) place dans le plan complexe les points B et C dont les affixes sont solutions de cette équation et B étant le point l'affixe les points B et C dont les affixes sont solutions de cette équation et B étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire négative.
- 3) Montre que c'est l'image de B par solution de centre O et l'angle $\frac{\pi}{2}$
- 4) Soit A le point d'affixe $z_A = 3(1 - \sqrt{3})$
 Calculer un argument du nombre complexe $z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ en déduis la nature du triangle ABC puis construis le point A

Exercice 21 : Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$(E): z^4 + 2(12 - 7i)z^2 - 40 - 96i = 0$

Exercice 22 : On considère le polynôme suivant : $P(z) = z^3 - (1 - 3i)z^2 - (3 + 8i)z + 3 + 11i$

- a) Démontre qu'il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2, que tu préciseras, tel que l'on ait : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 1 - i)Q(z)$.
- b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 23 : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes définis par :

$$P(z) = z^3 + 9iZ^2 + 2(6i - 11)Z - 3(4i + 12)$$

$$Q(z) = z^3 + (-6 + 5i)z^2 + (9 - 12i)z + 6 + 13i$$

$$(E) : z^3 - (2 + 6i)z^2 + (-12 + 7i)z + 9 + 7i = 0$$

$$H(z) = z^4 - 3z^3 + (4 + i)z^2 - 3z + 3 + i = 0$$

$$T(z) = z^4 - (3 + 2i)z^3 + (4 + 7i)z^2 - (1 + 18i)z - 9 + 13i$$

- Démontre que $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
- Démontre que $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Q(z) = 0$
- Justifie que $1 + i$ est une solution de (E).
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $H(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $T(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines opposées.

Exercice 24 :

I. Soit $f(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (2 - 4i)z - 4i$

- Montre que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$
- Résous dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1) $\frac{2z-i}{z-2i} = z$

2) $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$

- III. Calcul $(2 + 3i)^3$ puis déduis-en les racines cubiques de $-46 + 9i$

Exercice 25 :

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation, $z^2 - 2z + 2 = 0$.

En déduire les solutions de l'équation

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$$

2) On donne les polynômes

$$f(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 \text{ et}$$

$$g(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1 + i)z - 5$$

- Montre que $f(z) = 0$ admet une solution réelle puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
- Calcule $g(1)$ et $g(i)$ et en déduire les solutions de l'équation $g(z) = 0$
- Place les points-images dans le plan complexe
- Soit

$$f(z) = (1 + i)z^3 - 4(1 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 + 2i.$$

Calcule $f(3 + i)$ puis résous dans $\mathbb{C}$

$$\text{l'équation } f(z) = 0$$

Exercice 26 :

- On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - 1 = 0$
 - Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E).
 - Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - 1 = (z - i)(\sqrt{3} - i)(z^2 + az + b)$
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$
 - En déduire les solutions de (E).

- On considère le point A d'affixe, le point d'affixe et le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.
 - Placer ces points sur un graphique.
 - Déterminer le module et un argument du quotient : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
 - En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC.

Exercice 27 : Pour tout nombre complexe z , on définit : $f(z) : z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

- Détermine les nombres a , b et c tels que : $f(z) : (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = -i\sqrt{3}$; $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \bar{z}_C$
 - Place les points A, B, C et D
 - Quelle est la nature du triangle ACD ?
 - Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. Donner une équation de ce cercle.

- 4) On note E le symétrique de C par rapport au point O. Précise l'abscisse de E et déterminer la nature du triangle BED.

Exercice 28 : α étant un nombre réel tel que $\alpha \in [0; 2\pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) : z^3 + (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$$

- calcul : $P(1)$
- déduis-en l'existence de trois nombres a , b et c tels que : $P(z) : (z - 1)(az^2 + bz + c)$
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
- On considère trois nombres complexes $z_1 = 1$; $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ et $z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$. Détermine le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1 , z_2 et z_3

Exercice 29 : Soit l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$$

- Montrer que l'équation admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle
- En déduire la résolution de cette équation
- Soient A, B et C les points images de ces solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Déterminer la nature du triangle ABC
- Déterminer l'abscisse de l'isobarycentre G de ce triangle.

Exercice 30 : Vérifie que $P(\alpha) = 0$ et Détermine la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

- $P(z) = z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i$ et $\alpha = -2 + i$.
- $P(z) = z^3 + (6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i$ et $\alpha = -3 - 2i$.
- $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4$ et $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.
- $P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$ et $\alpha = -1 - 2i$.
- $P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$ et $\alpha = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 31 : Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $z^3 = 1$; b) $z^3 = 8i$; c) $z^3 = (1 + i\sqrt{3})^2$;
 d) $z^3 - 8 = 0$;
 e) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right) - 2 = 0$

Exercice 32 : Résous dans $\mathbb{C}$, les équations ci-après :

- $-\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) - 13 = 0$
- $2z^4 - 2z^2 + 1 = 0$
- $z^6 - (1 + i)z^3 - i = 0$

4) $z^6 - z^3 - 2 = 0$

Exercice 33 : Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - (24 + 10i) = 0$;
 b) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$;
 c) $2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$; d) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 34 : On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 2z + 1$. α désigne un complexe quelconque.

- Montre que si α est solution de l'équation $P(\alpha) = 0$ il en est de même de $\bar{\alpha}$ et de $\frac{1}{\alpha}$.
- a) Calcule $P(1 + i)$.
 b) En déduis la résolution de l'équation $P(\alpha) = 0$

Exercice 35 :

- Détermine les racines cinquièmes de $z = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation, $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$
- Détermine les racines cubiques de $z = 4\sqrt{2}(1 + i)$
- Détermine les racines sixièmes de $z = 32(\sqrt{3} + i)$

Exercice 36 :

- Détermine sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité
- Calcul $(1 + i)^6$

- 3) En utilisant les questions 1) et 2), donne la forme algébrique des solutions de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, 8z^6 + i = 0$
- 4) Détermine la forme trigonométrique des solutions de (E)
- 5) Linéarise $A = \cos\left(\frac{2}{3}x\right) \sin^3\left(\frac{2}{3}x\right)$
- 6) Donne la forme algébrique du nombre complexe $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right)^{11}$

Exercice 37 : Soit le polynôme $P(z)$ définie par :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

1. Vérifier que

$$P(z) = z^2 \left[\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right] \text{ avec } z \neq 0$$

2. En utilisant la question précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

Exercice 38 :

Soit le polynôme $P(z)$ définie par :

$$P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 1.$$

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C}^*,$ on a :
- $$P(z) = z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z}\right) + b \right]$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + az + b = 0$
3. En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$

Exercice 39 :

- Détermine les racines cubiques de 1 ; -1 ; i et $-i$.
- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^4 = 1 + i$.
Quelle est la nature du polygone dont les sommets sont les images de cette équation ?
- Soient les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 ont pour affixes les racines cinquièmes du nombre complexe $u = 16\sqrt{2}(-1 + i)$
 - Ecris le nombre complexe $-1 + i$ sous forme exponentielle.
 - Détermine les affixes des points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4
 - Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
 - Précise la nature de M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .

Exercice 40

- Résous dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$
- Développe $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$
 - Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.
En posant $z = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, détermine sous forme algébrique et trigonométrie les racines de l'équation (E).
 - En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 41 :

- I- on pose $A = 5\sqrt{2}(1 + i); B = -5(1 + i\sqrt{3})$
- Trouve le module et un argument de :
 $A, B, \bar{A}; \frac{1}{A}; \frac{B}{A}; B \times A$ et $\frac{A}{B^2}$
 - soit z un nombre complexe tel que : $Az = B$
 - Ecris z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$
 - Calculer z^{2060}
 - soit le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$
 - Ecris sous forme algébrique les complexes $-z; z^2; \frac{2}{z}$
 - Détermine le module et un argument des nombres complexes $z; -z; z^2; \frac{2}{z}$
 - Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ unité graphique 2 cm.
 - Place les points I, J, K et N affixes respectives $z; -z; z^2; \frac{2}{z}$
 - Quelle est la nature des triangles IJK et JKN ?
 - Montre que les quatre points I, J, K et N sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z tel que : $z = \frac{z+1}{z-1}$
 - Trouver l'ensemble (D) des points M tels que z soit un réel

- b) Trouver l'ensemble (C) des points M tels que z soit un imaginaire
- c) Trouver l'ensemble (M) des points M tels que M et M' soient alignés

Exercice 42 : On considère un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe. Soit les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i$;

$$z_B = \frac{2[\cos(\frac{7\pi}{15}) + i\sin(\frac{7\pi}{15})]}{\cos(\frac{\pi}{5}) - i\sin(\frac{\pi}{5})} \quad \text{et} \quad z_C = 2 - 2i$$

1. Ecrire les complexes z_A ; z_B et z_C sous forme exponentielle.
2. Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OB}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{3}$ (On fera une figure).

Exercice 43 : Le plan est rapporté au repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère :

- le point A d'affixe $z_A = 5 - i\sqrt{3}$;
- le point B d'affixe z_B est tel que OAB soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$;
- le point Q d'affixe z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$;
- le point K d'affixe z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1. Déterminer les affixes z_B ; z_Q et z_K respectivement des points B, Q et K.
2. Démontrer que $\frac{z_K - z_A}{z_K}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OKA puis place les points A, B, Q et K dans le plan.
3. Soit C le point d'affixe z_C tel que $z_C = \frac{2z_A}{3}$
 - a) Calculer $\frac{z_K - z_B}{z_K - z_C}$. Que peut-on en déduire les points B, C et K ?
 - b) Placer le point C.

Exercice 44 : Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $-1 - i$; $2 + 3i$ et $-10 - 13i$.
Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 45 : Soient A, B et C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$ et $2 - 2i$.

1. Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (On fera une figure)
2. Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (On placera le point D sur la figure précédente)

Exercice 46 : Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$ et $2 - 2i$.

1. Etudier la nature des triangles ABC et BCD
2. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 47 :

- 1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$
 - a) Calcule $P(-1)$
 - b) Détermine les réels a et b tels que pour tout nombre z on ait : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.
 - c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (unité : 2 cm). On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2 + \sqrt{3}i$, $z_C = 2 - i\sqrt{3}$, $z_G = 3$
 - a) Réalise une figure et place les points A, B, C et G.
 - b) Calcule les distances AB, AC et BC puis en déduis la nature du triangle ABC.
 - c) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. En déduis la nature du triangle GAC.

Exercice 48 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

- 1) Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(1 - 3i)z - 4 = 0$.
- 2) On pose : $\forall z \in \mathbb{C}$
 $P(z) = z^3 + (1 - 3i)z^2 + (2 + 2i)z - 8i$.
 a) Justifie que : $P(-2i) = 0$.
 b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$.
 c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.
- 3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2 + 2i$ et $1 + i$. On note D le symétrique de A par rapport au point O.
 a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
 b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.
 c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 49 : Pour tout nombre complexe z , on pose $p(z) = (5 + i)z^2 + 2(5 + 3i)z - 4(2 + 4i)$.

- 1) Calcule $P(2i)$. Que peut-on conclure ?
- 2) Détermine les réels complexes a, b et c tels que pour tout nombre z , on ait : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)P(z) = z^3$
- 3) a) Calcule $(1 + 3i)^2$

b) En déduis la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

4) On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives:

$$z_A = 2i, z_B = 3 + i \text{ et } z_C = 2 - 2i$$

a) Place les points A, B et C.

b) Calcule un argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduis la nature du triangle ABC.

c) Soit D un point d'affixe z_D telle que $z_D - z_C = z_A - z_B$.

Détermine z_D puis place sur la figure précédente. En déduis la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 50 :

$$\text{Soit } P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18 + 63.$$

- 1) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$ et $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $z_D = z_C$.
 a) Place les points A, B, C et D.
 b) Quelle est la nature de triangle ACD ?
 c) Montre que les points A, B, C et D appartiennent à même cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.
 Donne une équation de $(\mathcal{C})$

4) On note E le symétrique de C par rapport à O. Précise l'affixe de E et détermine la nature du triangle BED.

Exercice 51 :

1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

$$a) z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$$

$$b) z + \frac{1}{z} = 1 ; z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

2) Soit P le polynôme de la variable complexe z tel que : $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$.

a) Vérifie que pour tout z non nul on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}.$$

b) En utilisant ce qui précède, résous l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 52 : Soient les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \text{ et } z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

1) Détermine le module et un argument des complexes : z_1 , z_2 et z_3 . En déduis que les points M1 ; M2 et M3 d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 appartiennent à un même cercle que l'on déterminera. Fais la représentation graphique.

2) On pose $z_1 = -2z_1 \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^2$. Met z_4 sous la forme algébrique

3) Détermine les racines carrées de z_4 .

4) On pose $z_5 = -4z_1z_3$. Détermine les racines quatrièmes de z_5

Fais la représentation graphique.

5) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

b) Ecris chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 53 : Soit P le polynôme complexe défini par :

$$P(z) = z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 6i)z - 8 - 16i.$$

1) Justifie que :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + (-5 + i)z + 8 + 4i).$$

2) a) Détermine les racines carrées du nombre complexe : $-8 + 6i$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (-5 + i)z + 8 + 4i$

b) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $P(z) = 0$.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = -3 + i$ et $z_C = -2 - 2i$.

a) Place les points A, B et C.

b) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$.

c) En déduis la nature du triangle ABC.

Exercice 54

1) On considère l'équation

$$(E) : z \in \mathbb{C}, (-1 - i)z^2 + 2(1 + i)z + 8 = 0.$$

a) Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm. On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$, $2 - 2i$ et $-1 + i$.

a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Détermine l'abscisse du point D pour que ABCD soit un parallélogramme. Place le point D.

3) On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$.

a) Ecris Z sous forme algébrique. En déduis la nature du triangle ABC.

b) Détermine l'abscisse z_E du point E milieu de [AB]. Place le point E.

Exercice 55 : On considère, dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $p(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i)$.

1) Démontre que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_1 que l'on déterminera.

2) Détermine le polynôme $q(z)$ tel que : $p(z) = (z - z_1)q(z)$.

3) Démontre que l'équation $q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_2 que l'on déterminera.

4) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$

5) On note z_3 la troisième solution de l'équation $p(z) = 0$

Démontre que les points A, B et C du plan complexe d'abscisses respectives et sont alignés.

Exercice 56

I/ On pose $a = \sqrt{3} - i$; $b = -\sqrt{3} - i$; $c = \frac{a^2}{b^3}$.

1) Détermine le module et un argument de c.

2) Donne la forme trigonométrique de $t = ab$.

II/ Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère le polynôme d'inconnue

$$z : P(z) = z^3 + 4iz^2 - 6z + 4i.$$

1) Calcule $P(2i)$.

2) Détermine les complexes a et b tels que pour tout complexe z on ait :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b).$$

3) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On désigne par z_1 la solution imaginaire pure et par z_2 et z_3 les deux autres solutions.

b) Compare z_1 et par $z_2 + z_3$.

Exercice 57 : Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes associés au plan affine rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = \frac{i-13}{-12+14i} \text{ et } z_2 = \frac{2i+1}{1-3i}.$$

1) Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique, puis détermine le module et un argument de chacun d'eux.

2) On désigne par A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2 détermine le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ et en déduis la nature du triangle AOB.

Exercice 58 : Soit a un nombre réel quelconque. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(E): z^3 - (ai + 2\sqrt{3})z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)z - 4ai = 0$$

1) Détermine le réel a pour que $-2i$ soit une solution de (E) .

2) Détermine le polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que :

$$z \in \mathbb{C}, z^3 + (2i - 2\sqrt{2})z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i =$$

$$Q(z)(z - \sqrt{3} - i)$$

3) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) pour $a = -2$.

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points A, B et C d'affixes

respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -2i$ et $z_C = \sqrt{3} - i$

a) Place les points A, B et C.

b) Détermine le module et l'argument de des nombres complexes z_A et z_C

c) D désigne le symétrique de D par rapport à (OJ) Montre que le triangle CDA est rectangle en A.

d) Montre que les points ACBD sont cocyclique.

Exercice 59 :

1) a) Montre que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Déduis des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2) a) Ecris $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

b) En déduis les arguments des solutions de (E) .

3) Déduis des questions 1) c) et 2) b) les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 60 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 9z - 27$.

a) Factorise $P(z)$, puis résous $P(z) = 0$.

b) Donne la nature du triangle formé par les points images des solutions de cette équation.

2) On nomme A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d tels que : $a = 3$; $b = -3i$;

$$c = 3i \text{ et } d = 2 - \frac{5}{2}.$$

a) Détermine l'affixe du point E, image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Détermine l'affixe du point I, symétrique de B par rapport à D puis celle du point J, symétrique de C par rapport à E.

c) Détermine l'affixe du point F milieu du segment [IJ].

d) Précise en justifiant, la nature du quadrilatère ODFE.

e) On pose $Z = \frac{z_J - z_A}{z_I - z_A}$. Calcule Z.

En interprétant géométriquement le module et un argument de Z, détermine la nature du triangle AIJ.

Exercice 61 : On considère l'ensemble des complexes z_n tels que $\forall n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$

1. On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Calculer z_1 ; z_2 ; z_3 et z_4

b) Placer les points M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4

2. Calculer le quotient : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$

3. Quelle est la nature du triangle $OM_n M_{n+1}$?

Application sur la similitude plane directe

☞ **Écritures complexes de quelques transformations**

Transformations	Écriture complexes
Translation de vecteur d'affixe b	$Z' = Z + b$
Homothétie de centre Ω et rapport $K \neq 0$ et $k \neq 1$	$Z' = kZ + b$; $b \in \mathbb{C}$ ou $Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$
Rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ	$Z' = e^{i\theta}Z + b$ ou $Z' - Z_\Omega = e^{i\theta}(Z - Z_\Omega)$
Similitude plane directe de rapport a	$Z' = aZ + b$; $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

☞ **Nature et éléments caractéristiques d'une similitude plane directe $S : z' = az + b$**

- 1) chercher l'écriture complexe de S ;
- 2) mettre la valeur de a sous la forme exponentielle (soit $a = |a|e^{i\theta}$).

Valeur de a	Nature et éléments caractéristiques de S
$a = 1$	$z' = z + b$; S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ $a \neq 0 \neq 1$	$z' = az + b$; S est une homothétie de centre Ω tel que $Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport $k = a$
$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $a =1$	$z' = az + b$; S est la rotation de centre Ω tel que $Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure $\theta = \arg(a)$
$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $a \neq 1$	$z' = az + b$; S est la composée commutative de l'homothétie de rapport $K = a $ et la rotation d'angle de mesure $\theta = \arg(a)$ de même centre Ω .

Propriétés

- 1) Si les points D, E et F sont les images respectives des points A, B et C par la similitude plane directe S d'écriture complexe $Z' = aZ + b$,
alors :
$$\begin{cases} S(A) = D \\ S(B) = E \\ S(C) = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_D = aZ_A + b \\ Z_E = aZ_B + b \\ Z_F = aZ_C + b \end{cases}$$
- 2) L'image de la droite (AB) par S est :
 - la droite $(A'B')$ avec $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$
 - le rapport de S est $k = \frac{A'B'}{AB}$
 - l'angle de S est $\theta = \text{mes}(\widehat{AB}, \widehat{A'B'}) [2\pi]$
- 3) Une équation réduite du cercle (C) circonscrit au triangle ABC , rectangle en A est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ où (C) a pour centre $I(a; b)$ le milieu du segment $[BC]$ d'affixe soit $z_I = \frac{z_B + z_C}{2}$ et de rayon $r = \frac{BC}{2}$ où $BC = |z_C - z_B|$
- 4) l'image du cercle (C) de centre I et de rayon r est le cercle (C') de centre $I' = S(I)$ et de rayon $r' = |k|.r$

Remarque : Les similitudes planes directes,

- multiplient les longueurs par la valeur absolue de leur rapport k ($r' = |k|.r$)
multiplient les aires par le carré de son rapport k ($A = k^2.A'$)

Série d'exercices

Exercice 1 :

1. Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre $I(-1; 2)$ et de rapport $k = -3$
2. Détermine l'écriture complexe de la translation qui transforme le point $A(0; -2)$ en $B(1; 1)$
3. Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 3i$
4. Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre $J(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ et de mesure d'angle $-\frac{\pi}{4}$
5. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega(0; 1)$ et de mesure d'angle $\frac{\pi}{6}$
6. Le point E est l'image du point $I(-1; 2)$ par la rotation r de centre $\Omega(2; 2)$ et de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$. Détermine z_E .
7. Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane: $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z$.

Exercice 2 : Détermine l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

- 1) f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 3i$.
- 2) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
(avec $z_A = 3 + i$ et $z_B = 2i$)
- 3) f est la translation qui transforme A d'affixe $2 - i$ en B d'affixe $1 - 3i$
- 4) f est l'homothétie de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + \sqrt{3}i$ en B d'affixe -1 .
- 5) f est l'homothétie de centre A d'affixe $2 + 2i$ et de rapport -3 .
- 6) f est l'homothétie de centre O et de rapport 2.
- 7) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$.
- 8) f est la rotation de centre C d'affixe $2 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
- 9) f est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$).
- 10) f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- 11) f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 - i$ en B d'affixe $-i$.
- 12) f est la similitude directe plane de centre A(1; -1), de rapport 3 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
- 13) f est la similitude directe plane de centre A d'affixe i de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

14) f est la similitude directe plane de centre O de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

15) f est la similitude directe plane de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ transformant A en B.
(avec $z_A = 3$ et $z_B = 2i$)

Exercice 3 : Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1. f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$;
2. f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$;
3. f est la rotation d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$.

Exercice 4 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1 - i$; i ; $1 + 3i$ et $5 + i$.

Détermine dans chaque cas, l'écriture complexe de la similitude directe f donnée :

- 1) f transforme O en A et B en C.
- 2) f transforme A en C et B en D.
- 3) f admet un centre A et transforme C en D.
- 4) f laisse invariant le point C et transforme A en B.

Exercice 5 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-i$; $2i$ et $3 - i$.

- 1) Détermine l'affixe du point I, l'image du point B par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 + 4i$.
- 2) Détermine l'affixe du point D, l'image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 3) Détermine l'affixe du point E, l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- 4) Détermine l'affixe du point F, l'image du point E par l'homothétie de centre B et rapport 2.
- 5) Détermine l'affixe du point G, l'image du point F par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6 : Pour chacune des similitudes directes et indirectes f donne la nature et les éléments caractéristiques :

- 1) f d'écriture complexe $z' = 3z + 1 - i$
- 2) f d'écriture complexe $z' = z + 1 - 2i$
- 3) f d'écriture complexe $z' = e^{-\frac{\pi i}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i$;
- 4) f d'écriture complexe $z' = iz + 1$
- 5) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 + i$;
- 6) f d'écriture complexe $z' = e^{\frac{2\pi i}{3}}z$
- 7) f d'écriture complexe $z' = i\bar{z} - 4i$;
- 8) f d'écriture complexe $z' = -z - 2i$
- 9) f d'écriture complexe $z' = i\bar{z} + 1$;
- 10) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)\bar{z} + i$

Exercice 7 : Soit la similitude directe plane S de centre $A(1; 1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et de d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe z a pour transformer le point M' d'affixe z' . **Exprimer z' en fonction de z .**

Exercice 8 : Soient A, B, C et D les points d'affixes : $z_A = -1 - i$; $z_B = i$; $z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 5 + i$. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

- Déterminer le rapport k et l'angle θ de S .
- Déterminer l'écriture complexe f associée à S .
- Déterminer l'affixe de Ω le centre de S .

Exercice 9 : On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $4i$; $2 + 2i$ et $3 + 3i$. Soit S la similitude directe transformant O en B et A en C .

- Détermine le rapport k et l'angle θ de S .
- Détermine l'écriture complexe f associée à S .
- Détermine l'affixe de Ω le centre de S .

Exercice 10 : Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe (S) dont l'écriture complexe est :

$$z' = (1 + i)z + 1 - i; z' = (1 - i)z + i;$$

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3}; z' = -iz + 2 + 6i.$$

Exercice 11 : Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

- Détermine l'écriture complexe de f .
- En déduis la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 12 : On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2i; z_B = 2 + i \text{ et } z_C = 1 - i. \text{ Soit } S \text{ la similitude directe de centre } \Omega, \text{ d'angle orienté } -\frac{\pi}{4} \text{ et de rapport } \sqrt{2}.$$

- Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + 1 + i$.
- Soient D et E deux points du plan tels que $S(D) = A$ et $S(B) = E$.
Détermine les affixes des points D et E .

Exercice 13 : On se restreint au plan de repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; s'identifiant au plan complexe dans lequel les affixes respectives a, b, c des points L_1, L_2, L_3 représentant les lampadaires sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue :

$$z^3 - (2 + 6i)z^2 + (-12 + 7i)z + 9 + 7i = 0$$

avec $Re(a) < Re(b) < Re(c)$

- Justifie que $1 + i$ est une solution de (E).
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S de centre L_2 qui transforme L_3 en L_1 .
 - Déduis en les caractéristiques de S .
 - Précise la nature du triangle $L_1L_2L_3$.

Exercice 14 : Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm, on considère l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E) : z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$$

- Justifie que $2i$ est une solution de (E).
 - Justifier que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = (z - 2i)[z^2 + (1 + 3i)z - 4]$
 - Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$.
 - Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
- Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1 - i$, $2i$ et $-2 - 2i$
 - Place les points A, B, C et D sur ta feuille de copie.
 - Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A .
- Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B .

- a) Démontre que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 + i)z - 2 + 2i$$

- b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de S
c) Démontre que $S(B) = C$.
d) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

Exercice 15 : Le plan (P) est matérialisé par le mur muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Les points A, B et C ont pour affixes les racines du polynôme $P(z) = z^3 - 5iz^2 - 11z + 15i$.

1. a) Développe, réduis et ordonne le polynôme $P(z) = (z - 3)(z^2 - 2z + 5)$
a) Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure et une seule que tu noteras z_0
b) Détermine les deux autres solutions de l'équation $P(z) = 0$
2. On suppose que les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(0; 3)$; $(2; 1)$ et $(-2; 1)$. Quelle est la nature exacte du triangle formé par les trois gravures.
3. Détermine par ses éléments caractéristiques, la similitude S qui transforme A en B et C en A.

Exercice 16 :

- I- On pose $Z_A = 2i$; $Z_B = 2 - 2i$ et $Z_C = 3 + i$
1) place les points A ; B ; C dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$
2) Détermine la nature du triangle ABC
3) Détermine l'abscisse du point D tel que ABCD soit un carré
II- Soit f la similitude directe de centre A qui transforme B en C
1) Détermine l'expression complexe de f
2) précise les éléments caractéristiques de f
Détermine l'abscisse du point D' image de D par f

Exercice 17 : On considère le polynôme

$$P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 20$$

- 1) Détermine les nombres complexes b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$
- 3) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points A, B, C et D d'abscisses respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 3 + i$
a) Faire une figure
b) Démontre que ABCD est un carré.
4) Soit S la similitude directe transformant A en A et C en B.

- a) Détermine l'écriture complexe de S
b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
c) Détermine l'image du point B par S
d) Construire l'image du carré ABCD par S.

Exercice 18 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; I; J)$. On considère les points A et B d'abscisses respectives $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe $z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i$.

- 1) Détermine les images par S des points O et A.
- 2) Détermine les éléments caractéristiques de S.
- 3) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.
a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C').
b) Construire (C').

Exercice 19 : Dans un repère orthonormé, on considère la transformation T qui fait correspondre à un point M d'abscisse z le point M' d'abscisse z' tel que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$

- 1) Quelle est la nature de T.
- 2) soit (D) la droite d'équation $x - y\sqrt{3} = 0$. Trouver l'image de la droite (D') par la transformation T.

- 3) Quelle est le transformé (C') du cercle (C) de centre A(0 ; 2) et de rayon $r = 2$. Donner l'équation de (C')

Exercice 20 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- Déterminez l'ensemble des points M(z) du plan P tels que : $(1 - i)z + 2i = 2$.
- Etudiez la transformation de P qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe : $z' = (1 - i)z + 2i$.
- En utilisant la transformation précédente, retrouvez le résultat du 1.

Exercice 21 :

- I- On définit l'application f de P dans P qui à M(z) associé M' tel que : $z' = iz + 2$
- Montre que f possède un point fixe A. on note z_A l'affixe de A.
 - Montre alors que : $z' - z_A = i(z - z_A)$
 - Quelle est la nature de l'application f ? trouve ses éléments caractéristiques.
- II-A-1) Détermine le nombre complexe z_1 tel que $|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1 + i\sqrt{3})z_1] = \frac{7\pi}{12}$
- 2) Soit $P(z) = z^2 - 4z - 4z + 8$
- a) montre que z_1 est solution de l'équation $P(z) = 0$. Trouve l'autre solution z_2 .

- b) Détermine le module et un argument de z_2
- B- Soit l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associé le plan telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$
- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f
 - détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par f, A étant l'image de la solution de l'équation $P(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative ; P(z) défini dans A-2).

Exercice 22 :

- A-1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $[z^2 - 2(1 + i)z + 4i]x(z^2 + 4z + 8) = 0$. Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C, D tels que :
- A et B ont même abscisse
 - A et C ont même ordonnée
- 2) Défini la similitude directe h du plan complexe telle que $h(A) = C$ et $h(B) = D$. Donne l'angle, le rapport et le rapport k et le centre Ω .

B- Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et C désigne l'ensemble $a = -1 + 3i$; $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$

- Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à point M d'affixe z associe le plan M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f. Détermine l'affixe du point B' image de B par la transformation f, vérifie que les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux.

Exercice 23 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Résoudre l'équation $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
 - on considère les complexes respectives $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et un argument de transformation de vecteur $\vec{WN} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure puis montrer que MNPQ est un carré.
- soit R le symétrie de P par rapport à O, E l'image P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
 - Placer ces points sur la figure.

- b) Calculer les affixes R et S puis montrer que S appartient au segment $[MN]$
- 3) on pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$
- a) montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $-\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$
- b) exprimer les affixes z de $\overrightarrow{PR}$ et z' de $\overrightarrow{PS}$.
- c) montrer que $|z| = |z'|$ et $\frac{z}{z'} = e^{i(\frac{\pi}{3})}$
- d) Dédire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 24 :

- Soit f la transformation définie par $z' = az + 3i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si : $a = 2$ puis si $a = -i$
- Soient $A(1)$; $B(2 + i)$; $A'(2i)$ et $B'(1 + i)$.
 - Vérifier que $AB = A'B'$
 - Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

Exercice 25 :

Partie A : Le plan est rapporté au repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- Calcule $(6 - 2i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$
- Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$
 - Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera

- b) Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
- c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Partie B : Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A ; B et C les points d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 4 + 2i$; $z_C = -2 + 4i$

- Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
 - Calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC
 - Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$.
 - Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant l'équation suivante : $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$
- Soit s la similitude plane directe telle que $s(A) = A$ et $s(B) = C$
 - Détermine le rapport k et l'angle de la similitude s.
 - Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude s.
 - Déduis-en la nature de la similitude s.

Exercice 26 : On considère l'équation :

$$(E): z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0.$$

- Démontre que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$. Et
 - Place les points A, B et C dans le plan complexe.
 - Montre que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ?
 - Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B. Donne l'écriture complexe de S et précise son centre Ω .

Exercice 27 : On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12z^2 + 8(1 - i)z + 20$, où z est un nombre complexe.

- Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + az + b)$.
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- Place dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les images A, B, C et D des nombres complexes respectifs $z_A = -2 + 4i$; $z_B = -2 - 4i$; $z_C = 2 + 3i$ et $z_D = 2 - 3i$.

Fais une figure.

- 4) Soit S la similitude directe qui transforme A en A et C en B .
 - a) Détermine l'écriture complexe de S .
 - b) Détermine les éléments caractéristiques de S .
 - c) Détermine l'image du point B par S .

Exercice 27 :

- 1) Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :
 $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$, détermine le module et un argument de chaque solution.
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par
 $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.
 - a) Détermine la nature de la transformation T et donne tous ses éléments caractéristiques.
 - b) Soit A le point d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$. Détermine les affixes respectives z_B et z_C des points B et C tels que $B = T(A)$ et $C = T(B)$. Construis les points A , B et C dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - 3) Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$, puis en déduis la nature du triangle ABC .

Exercice 28 : On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Soit le polynôme P de la variable complexe z tel que :

$$P(z) = z^3 + z^2 + (10 - 5 + 4i)z - 21 - 12i.$$

- 1) Calcule $P(3)$ et mets $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Dans le plan complexe soit les points A, B et C d'affixes respectifs 3 ; $1 - 2i$; $3 + 2i$.
 - a) Détermine la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C .
 - b) Détermine ses éléments caractéristiques.

Exercice 29

- 1) On considère l'équation $(E): z \in \mathbb{C}, z^3(1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$
 - a) Justifie que $2i$ est une solution de (E)
 - b) Justifie que :
 $\forall z \in \mathbb{C}, z^3(1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = (z - 2i)(z^2 + (1 + 3i)z - 4)$.
 - c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$.
 - d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) L'unité graphique est 2 cm. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1 - i$; $2i$ et $-2 - 2i$.

Place les points A, B, C et D dans le plan complexe. Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A .

3) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B .

- a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2 + 2i$ et justifie que $S(B) = C$
- c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S .

Exercice 30 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ L'unité graphique est 2 cm. On pose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 6z^2(12 - i)z - 9 + 3i.$$

- 1) Démontre qu'il existe un réel a tel que : $P(z) = 0$
- 2) Détermine deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - a)(z^2 + az + b)$.
- 3) Résous $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.
- 4) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $3, 2 + i$ et $1 - i$.
 - a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.
 - b) Démontre qu'il existe une unique similitude directe S de centre C , qui transforme A en B .
 - c) Détermine les éléments caractéristiques de S .

Exercice 31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) . On considère la transforme S du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 1) a) Soit le point d'affixe 2. Vérifie que : (O, I, J) .
 b) Justifie que S est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
- 2) a) Démontre que $\forall z \neq 2, \frac{z'z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 b) En déduis que le triangle $M \Omega M'$ est rectangle en M .
 c) Donne un programme de construction de l'image M' par S d'un point M donné.
- 3) a) Place les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans le plan muni du repère (O, I, J) . Construis les images respectives A' et B' de A et B par S .
 b) On note $z_A, z_B, z_{A'},$ et $z_{B'}$, les affixes respectives des points A, B, A' et B' . Démontre que $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.
 c) En déduis la nature du quadrilatère $AA'BB'$.

Exercice 55 : On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1) Donne une écriture trigonométrique de z_0 .
- 2) Montre que $z_0^4 = -8 + i\sqrt{3}$
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
- 4) En déduis les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.
 On peut remarquer que (E) équivaut à :
 $\left(\frac{z}{1-i\sqrt{3}}\right) = 1$.
- 5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, place les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $z_A = 1 - i\sqrt{3}; z_B = -1 + i\sqrt{3};$
 $z_C = \sqrt{3} + i; z_D = -\sqrt{3} - i$.
 a) Donne une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 b) Vérifie que : $r(A) = C; r(C) = B$ et $r(B) = D$.
 c) En déduis que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.