

TD Nombres complexes. TSEXP

Forme algébrique

- 1** Ecris sous forme algébrique les nombres complexes donnés puis en déduis la partie réelle et imaginaire de chacun d'eux :

a) $Z = (-1 - i)^3$; b) $Z = i^5$; c) $Z = \frac{i}{(1+i)(3-2i)}$; d) $Z = \left(1 + \frac{2}{i}\right)(3 - 2i)$

- 2** On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 - 2i$ et $Z_2 = 3 + i$.

Ecris sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

Module et argument - Forme trigonométrique - Forme exponentielle

- 3** I// Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $Z = -3 - 3i$; b) $Z = i\cos\theta + i\sin\theta$; c) $Z = \frac{1-itang\theta}{1+itang\theta}$; d) $Z = 1 - e^{i\frac{\pi}{5}}$;

e) $Z = 1 + e^{i\frac{6\pi}{7}}$; f) $Z = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}$; g) $Z = 1 + i + i^2 + \dots + i^{18}$

II// Détermine la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; b) $Z = \sqrt{3} + i$; c) $Z = \frac{-1-i}{2}$; d) $Z = -1 + i\sqrt{3}$; e) $Z = (-\sqrt{3} - i)^3$

f) $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1+i}$; g) $Z = (1+i)(-2-2i)$; h) $Z = (-1+i)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

i) $Z = -\cos\alpha + i\sin\alpha$; j) $Z = -\cos\alpha - i\sin\alpha$.

- 4** Complète le tableau suivant :

Forme algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Forme trigonométrique			$2 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$
Forme exponentielle		$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	

- 5** On pose : $A = 5\sqrt{2}(1 + i)$; $B = -5(1 + i\sqrt{3})$

1) Détermine le module et un argument de : A ; B ; $\bar{A}$; $\frac{B}{A}$; $A \times B$ et $\frac{A}{B^2}$

2) Soit Z un nombre complexe tel que : $AZ = B$

a) Ecris Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

c) Calcule $(Z)^{12}$

- 6** On pose : $Z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1) Calcule Z^2 puis détermine son module et son argument.

2) En déduis de ce qui précède le module et un argument Z .

- 7** Les parties I et II sont indépendantes :

I- On pose : $|Z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(1 + i\sqrt{3})Z] = \frac{7\pi}{12}$.

Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de Z .

II- On pose : $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $Z' = 1 - i$

- 1) Ecris $\frac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- 2) En déduis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

8 Soit Z un nombre complexe tel que : $Z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

On donne pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes S et S' tels que :

$$S = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{n}\right)$$

$$S' = 1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{n-1}$$

- 1) Donne une écriture simplifiée de S' .
- 2) Donne la partie réelle et imaginaire de S' .
- 3) En déduis que $S = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

9 1) Soit Z un nombre complexe de module 1.

a- Compare $\frac{1}{Z}$ et $\bar{Z}$.

b- Soit Z_1 et Z_2 deux nombres complexes de module 1 telque $Z_1 \times Z_2 \neq -1$.

Montre que $Z = \frac{Z_1 + Z_2}{1 + Z_1 \times Z_2}$ est un nombre réel.

c- Exprime Z en fonction des arguments respectifs α et β de Z_1 et Z_2 .

- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n = e^{inx}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

10 On considère le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + i$.

- 1) Comment choisir l'entier n pour que Z^n soit un imaginaire pur ?
- 2) Soit U_1 et U_2 deux nombres complexes distincts tels que : $U_1^2 = U_2^2 = Z$.
On notera U_1 celui dont la partie réelle est positive.
 - a- Quels sont les modules de U_1 et U_2 ?
 - b- Déterminer les arguments de U_1 et U_2 .
- 3) On pose $U_1 = x + iy$ avec x et y tous des nombres réels.
Calcule x et y puis en déduis la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

11 1) Soit Z un nombre complexe telque : $2Z^2 + 3\bar{Z}^2 = 5 + i$ (1)

- a- Démontre que l'on a : $Z^2 + \bar{Z}^2 = 2$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = -2i$.
- b- En déduis le module et un argument de Z^2 .
- c- Détermine l'ensemble des nombres complexes vérifiant la relation (1).
- 2) Soit α un réel telque $0 < \alpha < \pi$.
 - a- Résoudre pour tout $Z \in \mathbb{C}$, l'équation (E) : $Z^2 \sin^2 \alpha + Z \sin 2\alpha + 1 + \cos^2 \alpha = 0$.
 - b- Soit Z_1 et Z_2 les solutions de (E). Vérifie que $Z_1^2 + Z_2^2$ est un réel indépendant de α .
 - c- On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 .
 - d- Détermine α telque $\forall \alpha \in \left[\frac{\pi}{12}; \pi\right]$; on a : $M_1 M_2 = 2\sqrt{2}$

Détermination de l'ensemble des points (lieux géométriques).

12 Détermine les ensembles suivants :

- 1) L'ensemble (E_1) des points M d'affixes Z tels que : $|Z - i| = 2$
- 2) L'ensemble (E_2) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} - i| = 2$
- 3) L'ensemble (E_3) des points M d'affixes Z tels que : $|Z + 1 - 2i| = |\bar{Z} - 1 - i|$
- 4) L'ensemble (E_4) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6}$
- 5) L'ensemble (E_5) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4}$
- 6) L'ensemble (E_6) des points M d'affixes Z tels que : $|\bar{Z} + 1 + 2i| \leq 1$
- 7) L'ensemble (E_7) des points M d'affixes Z tels que : $1 \leq |Z - 2 + i| \leq 2$
- 8) L'ensemble (E_8) des points M d'affixes Z tels que : $|2i\bar{Z} + 1| < |2\bar{Z} + 2 - i|$
- 9) L'ensemble (E_9) des points M d'affixes Z tels que : $\arg\left(\frac{-i\bar{Z} + 2i + 3}{\bar{Z} - 1 - i}\right) = -\pi$

13 I // Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de 1 et soit $Z = \frac{z+1}{z-1}$

Détermine l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

- 1) $|Z| = 1$; 2) Z est un réel. ; 3) Z est un imaginaire

II // Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A; M$ et N d'affixes respectives $i; Z$ et iZ avec $Z = x + iy$.

- 1) Détermine l'ensemble des points (Γ) du plan tels que les images ponctuelles des trois complexes $i; Z$ et iZ soient alignées.
- 2) Détermine des points (Ω) du plan tels que les images ponctuelles des trois complexes $i; Z$ et iZ forment un triangle rectangle au point d'affixe i .

Linéarisation.

14 Linéarise les expressions : $A = \sin^3 x; B = \cos^3 \frac{x}{2}; C = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$

15 On pose $Z = 1 + e^{(-2i\theta)}$.

- 1) Montre que $Z = 2e^{(-i\theta)} \times \cos \alpha$.
- 2) Linéarise $\cos^2(11x)\sin^3(11x)$ puis justifie que pour tout nombre réel x , on a :
 $\cos(4x) \times \sin(4x) \times \cos(2x) = \frac{1}{4}[\sin(9x) + \sin(5x) + \sin(3x) - \sin(x)]$

16 On pose $Z_n = (1 + i)^n - (1 - i)^n$.

- 1) Montrons que Z_n est un imaginaire pur.
- 2) Détermine les entiers n vérifiant $Z_n = 0$

Résolution d'équations et systèmes d'équations.

17 Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; b) $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; c) $Z^2 + 2\sin \alpha Z + 1 = 0$
- d) $Z^2 - 2\cos \alpha Z + 1 = 0$ e) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

- 18** 1) Développe le produit de facteurs suivant : $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
2) Résous l'équation $Z^4 = 1$

3) En déduis des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ puis } \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right) + 1 = 0$$

19 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

- 1) Vérifie que $Z^4 = -119 - 120i$
- 2) Détermine les racines quatrième de l'unité.
- 3) En déduis les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

20 Résous les systèmes :

$$1) \begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 6 \\ Z_1 + Z_2 = 5 \end{cases} ; 2) \begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases} ; 3) \begin{cases} iZ + \overline{Z'} = -2\sqrt{3} \\ \overline{Z} - iZ' = -2 \end{cases}$$

21 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le polynôme $p(Z)$ tel que : $p(Z) = Z^3 - (3+5i)Z^2 + (-4+9i)Z + 6-4i$

- 1) Démontre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on notera Z_1 , dont on déterminera la valeur.
- 2) Factorise $p(Z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$

22 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le polynôme $p(Z)$ tel que $p(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6+i)Z + 3i - 1$

- 1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.
- 2) Factorise $p(Z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

23 On considère l'équation $(E): (\sin^2 \alpha)Z^2 + (\sin 2\alpha)Z + 1 + \cos^2 \alpha = 0$.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- 2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (E)
 - a- Prouve que $Z_1^2 + Z_2^2$ est indépendant de α .

b- Trouve les valeurs de α pour que le module de Z_1 et Z_2 soient égal à $\frac{\sqrt{7}}{2\sin \alpha}$

24 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le polynôme $p(Z)$ tel que : $p(Z) = Z^3 + 2(1-2\cos 2\theta)Z^2 + 4(1-2\cos 2\theta)Z + 8$

- 1) Calcule $p(-2)$.
- 2) Factorise $p(Z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
- 3) On désigne par $Z_1; Z_2$ et Z_3 les solutions de l'équation $p(Z) = 0$.
Calcule le module et un argument de $Z_1; Z_2$ et Z_3 .
- 4) On désigne par $A; B$ et C les points d'affixes respectives $Z_1; Z_2$ et Z_3 .
Pour quelles valeurs de θ , le triangle ABC , est-il équilatéral ?

25 On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): Z^2 - 2(4+5\cos \theta)Z + (4\cos \theta + 5)^2 = 0$, où $\theta \in [0; \pi]$

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) . On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et Z_2 l'autre solution.
- 2) Soient a et b deux nombres complexes tels que $a = Z_1 + e^{i(\pi-\theta)}$ et $b = Z_2 + e^{i(\pi+\theta)}$
 - a- Détermine le module et un argument de a et b .
 - b- Ecris sous forme trigonométrique a et b .

26 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que : $f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$

- 1) Prouve que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors $\overline{Z_0}$ et $\frac{1}{Z_0}$ en sont aussi.
- 2) Calcule $f(1+i)$ puis en déduis toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

27 Soit le polynôme $p(Z)$ définie par $p(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$

- 1) Vérifie que : $p(Z) = Z^2 \left[\left(Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - \left(Z + \frac{1}{Z} \right) (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$ avec $Z \neq 0$
- 2) En utilisant la question précédente, résous l'équation $p(Z) = 0$.

28 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

- 1) Calcule les racines carrées de u .
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$ (On notera par Z_1 et Z_2 ces solutions).
- 3) Montre que : $\left| \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right| = \sqrt{2}$

Configurations géométriques du plan.

29 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontre que ces trois points sont alignés. (On fera une figure).

30 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.
a) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .
b) Détermine l'axe Z_D du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
(On fera une figure).

31 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectives : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.
a) Détermine la nature des triangles ABC et BCD .
b) Détermine le centre et le rayon pour que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (On fera une figure).

32 On considère un repère orthonormé directe $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ du plan complexe. Soient les points $A ; B ; C$ d'affixes respectives : $Z_A = -1 + i$; $Z_B = \frac{2 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) \right]}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

- 1) Ecris les complexes $Z_A ; Z_B$ et Z_C sous forme exponentielle.
- 2) Détermine l'axe Z_D du point D pour que le triangle OBD soit équilatéral direct.

33 On considère un repère orthonormé directe $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ du plan complexe. Soit les points $A ; B ; M$ d'affixes respectives : $Z_A = 1$; $Z_B = 2$ et $Z = 1 + e^{2i\theta}$ avec $\theta \in]0 ; \pi[$.
1) Montre que le point M appartient au cercle de $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1.
2) Exprime l'angle $(\widehat{AB ; AM})$ en fonction de θ puis en déduis l'ensemble (E) des points M quand $\theta \in]0 ; \pi[$.

34 Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle $(\vec{OA} ; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.

1) Détermine les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.

2) Démontre que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduis la nature du triangle OKA.

3) Soit C le point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2}{3}Z_A$

Calcule $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on déduis des points B ; C et K ?

35 On considère dans le plan complexe P, le point M_n d'affixe Z_n tels que : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n \end{cases}$

1) a- Calcule Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4 .

b- Place les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4 .

2) Calcule le quotient : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ puis en déduis la nature du triangle $OM_{n+1}M_n$.

36 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2 . Le point K est le milieu de $[IA]$. On appelle $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre IA.

1) Soit B le point d'affixe b où $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire b sous forme algébrique puis montre que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

2) Soit D le point du cercle $(\mathcal{C})$ telque $(\widehat{KI} ; \widehat{KD}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soit d d'affixe D.

a- Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$?

b- Donne un argument de $d + \frac{1}{2}$ puis en déduis d .

c- Détermine le réel a vérifiant l'égalité $\frac{1+2ai}{1-ai} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$.

3) Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2xi}{1-xi}$. On pose $Z = \frac{m-1}{m+2}$. Calcule Z puis en déduis la nature du triangle AIM.

4) Soit N un point, différent de A, du cercle $(\mathcal{C})$ et n son affixe.

Démontre qu'il existe un réel y telque $n = \frac{1+2yi}{1-yi}$

Transformations géométriques du plan.

37 Soit (T) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe M' d'affixe Z' tel que $Z' = (1+i)Z + 1 - i$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (T).

38 Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On désigne par M, le point d'affixe Z et ayant pour transformer le point M' d'affixe Z' . Exprime Z' en fonction de Z.

39

Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D .

- 1) Détermine l'expression complexe de S
- 2) Détermine les éléments caractéristiques de S
- 3) Détermine les coordonnées de A' , image du point A par S

40

Détermine l'expression complexe de la transformation dans chacun des cas suivants :

- 1) $\mathcal{T}$ est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2) $\mathcal{S}$ est la symétrie centrale de centre $\Omega\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- 3) $\mathcal{H}$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 4) $\mathcal{R}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 5) S est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

41

On donne l'expression complexe d'une transformation (T) telle que : $Z' = aZ - 2i$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (T) dans chacun des cas suivants :

- 1) $a = 2$; 2) $a = 1 + i$; 3) $a = -1$; 4) $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $a = 1$

42

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 - (4 + i\sqrt{3})Z^2 + (3 + 4i\sqrt{3})Z - 3i\sqrt{3} = 0$

1) Montre que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω .

2) Soit f , l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z , on a :

$$f(Z) = aZ + b.$$

a-Détermine les réels a et b pour que $f(\omega) = \omega$ et $f(\alpha) = \beta$.

b-Calcule le module et un argument de a .

c-Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

43

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. A est le point d'affixe $2i$ et P^* le plan privé de A .

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $Z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe Z' tel que :

$$Z' = \frac{2iZ - 5}{Z - 2i}.$$

1) Montre que pour tout point M de P^* , le point M' est distinct de A .

2) Démontre que T est une bijection de P^* sur lui-même. Détermine sa réciproque T^{-1} .

3) a- Montre qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation : $Z^2 - 4iZ + 5 = 0$.

b- Trouve le réel α tel que : $Z^2 - 4iZ + 5 = (Z - 2i)^2 + \alpha$.

c- Montre alors que T admet deux points invariants B et C .

4) On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privé de A .

Montre que (D^*) est globalement invariante par T .

5) a- Montre que pour tout $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \times |Z - 2i| = 9$.

b- Soit (Γ) le cercle de centre A et de rayon 3. Montre que (Γ) est globalement invariant par T .

44

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On donne quatre points $A ; B ; C$ et D d'affixes respectives : $Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$ et $Z_D = 2 + 4i$

1) Soit S la similitude plane directe qui tout point M d'affixe Z , fait correspondre le M' d'affixe Z' tel que : $Z' = 3iZ + 13 - 9i$.

- a- Donne les éléments caractéristiques de S .
 b- Quelle est l'image des points C et D par la similitude S ?
 c- Montre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{S(C)S(D)}$ sont orthogonaux.
 2) Soit R la similitude plane directe qui transforme B et C en D .
 a- Trouve la relation liant l'affixe Z d'un point M et l'affixe Z' de son image $R(M)$.
 b- Donne les éléments caractéristiques de cette similitude (on appellera J le point invariant).
 Montre que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
 c- Que représente le point D pour le triangle ABC ?
 3) Montre que J est un point de la droite (AB) . Donne une mesure en radian de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$.

45

Soit α un nombre complexe.

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)Z^2 - 2i(\alpha+1)Z + (i-1)(\alpha^2+1) = 0$.
- 2) Soient Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation.
 Trouve entre Z_1 et Z_2 , une relation indépendante de α .
- 3) Caractérise la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_2 d'affixe Z_2 .
- 4) On pose $Z_1 = x + iy$ et $Z_2 = x' + iy'$.
 a- Exprime x' et y' en fonction de x et y .
 b- Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation $x + 2y - 1 = 0$?

Problèmes.

46

Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note M le point d'affixe Z .

- 1) Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe Z_B est telle que $f(Z_B) = 1 + 2i$
- 2) Soit Z un élément de E . on note r le module de $Z + i$ et α une mesure de son argument.
 Exprime la forme trigonométrique de $f(Z) - i$ en fonction de r et α .
- 3) Soit A le point d'affixe $-i$
 a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$
 b) Montre que B appartient à (Γ) .

47

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère le polynôme p définie par : $p(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

- 1) a) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle notée Z_0 que l'on déterminera.
 b) Factorise $p(Z)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
- 2) Soient les points $A ; B$ et C d'affixes respectives : $Z_A = 2$; $Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = -2 + 4i$
 a) Calcule le rapport $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC
 b) Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$
 c) Détermine l'ensemble des points (Δ) du plan telque : $|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$
- 3) Soit S la similitude directe du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
 a) Détermine l'expression complexe de S .
 b) En déduis l'affixe $Z_{C'}$ du point C' , image du point C par S .