

(Brazzaville pool sangha-Likouala)

Travaux Dirigés n°1**Niveau :** Terminale**Série :** D**Epreuve :** Mathématiques**Thème :** Nombre Complexe**Exercice 1 :** (5pts)

On considère un polynôme p tel que z est un élément de $\mathbb{C}$

$$P(z) = z^3 - (5 - i)z^2 + 2(5 - 3i)z - 8(1 - 2i)$$

- 1) Démontrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0
- 2) Déterminer les valeurs a et b tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$
- 3) En déduire la résolution de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$
- 4) On considère les points A , B et C d'affixes respectives $-2i$; $2+2i$; $3-i$, soit U un nombre complexe défini par : $U = \frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$
 - a) Déterminer le module et l'argument de U
 - b) En déduire la nature du triangle ABC
- 5) Soit g la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C
 - a) Donner l'écriture complexe de g
 - b) Donner les éléments caractéristiques de g
 - c) Donner les expressions analytiques de g

Exercice 2 : (5pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$, A, B et C désignent les points d'affixes

$$Z_A = -2\sqrt{3}, Z_B = \sqrt{3} - 3i; Z_C = 2i$$

- 1) Ecrire Z_B sous la forme exponentielle
- 2) On désigne par E le barycentre du système $\{(A; 1), (B; 3)\}$ et par F celui du système $\{(A; 2), (B; 1)\}$
 - a) Déterminer l'axe Z_E et Z_F des points E et F

- b) Placer les points A , B , C , E et F dans le repère
- c) Démontrer que les points A ; C et E d'une part et les points A ; B et F d'autre part sont alignés
- 3) a) Démontrer que le quotient $\frac{Z_E - Z_C}{Z_E - Z_B}$ peut s'écrire sous la forme ki ou k est un nombre réel à déterminer, En déduire que dans le triangle ABC , E est le pied de la hauteur issue du point B
- b) Démontrer que $\frac{Z_F - Z_C}{Z_F - Z_B}$ peut s'écrire sous la forme $k'i$ ou k' est un nombre réel à déterminer, En déduire que dans le triangle ABC , F est le pied de la hauteur issue du point C
- c) En déduire que les points A ; B ; E et F sont cocycliques
- 4) On désigne par H le barycentre du système $\{(A; 2), (B; 1); (C; 6)\}$
 - a) Démontrer que H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF)
 - b) Qu'en déduit-on pour le point H par rapport au triangle ABC ?

Exercice 3 : (5pts)

- 1) On considère le polynôme p défini par :

$$P(z) = z^3 + (i - 5)z^2 + 2(5 - 3i)z - 8 + 16i$$

- a) Démontrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure ib ou $b \in \mathbb{R}$
- b) Mettre sous la forme $(z - ib)(z^2 + \alpha z + \beta)$ ou α et β sont des complexes à préciser
- c) En déduire la résolution de l'équation $p(z) = 0$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points I, J, K et L d'affixe respectives 1 ; -1+i ; 3-i et 2+2i on note par $\emptyset$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + 1 - i| = \sqrt{10}$

- Justifier que les points I, J et K sont alignés
 - Vérifier que $\emptyset$ passe par le point L, puis déterminer cet ensemble
 - Construire le triangle JKL et l'ensemble $\emptyset$
- 3) On note S la similitude plane directe qui transforme I en J et K en L
- Donner l'expression complexe de S
 - Déterminer les éléments caractéristiques de S
- 4) Soit la transformation h d'expression complexe $z' = -4z - 10i$
- Donner la nature et les éléments caractéristiques de h
 - Déterminer l'expression analytique de h

Exercice 4 : (5pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$z^2 - 2z + 2 = 0$, Préciser le module et un argument de chacune des solutions

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation

$$\varphi: (-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + i$; $Z_B = \overline{Z_A}$ et $Z_C = 2Z_B$

- Donner les formes algébriques de Z_B et Z_C
- Placer les points A, B et C dans le repère
- Montrer que les points A, B et C sont situés sur un même cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$
- Calculer $\frac{Z_C - Z_I}{Z_A - Z_I}$, en déduire la nature du triangle IAC

- Le point E est l'image du point O par la translation du vecteur $2\vec{IC}$. Déterminer l'affixe du point E
- Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, Déterminer l'affixe du point D

Exercice 5 : (5pts)

1) Donner l'écriture Complexe de chacun des Transformations suivantes :

- f est la similitude plane directe de centre $\Omega(1 ; 2)$ de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$
- g est la translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $\beta = 1 - 2i$
- h est la rotation de centre $\Omega(-1 ; 1)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on note les points K ; L et M d'affixe respectives 1+i ; 1-i et $-i\sqrt{3}$

- N est la symétrie de M par rapport à L ; Montrer que : $Z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$
- La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M en A et N en C. Déterminer les affixes Z_A et Z_C des points A et C
- La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 2i transforme M en D et N en B ; Déterminer les affixes Z_D et Z_B des points D et B
- Montrer que les segments $[DB]$ et $[AC]$ ont le même milieu K
- Déterminer $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K}$, puis en déduire la nature du quadrilatère ABCD

Exercice 6 : (5pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$2z - \bar{z} + 1 + 6i = 0 \text{ Ou } \bar{z} \text{ est le conjugué de } z$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation on prendra $z = x + iy$
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixe respectives $Z_A = -1 - 2i$,

$$Z_B = 1 - 4i, Z_C = -1 - 6i \text{ et } Z_D = 1$$

- Soit S est la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et qui transforme B en C , Montrer que son écriture complexe est : $z' = (1-i)z + 2-i$
- Déterminer le rapport et l'angle de S
- Montrer que pour tout point M d'affixe Z , distinct de A , on a : $z' - z = -i(z - z_A)$
- En déduire la nature du triangle $MM'A$ ou $M' = S(M)$
- Placer les points A, B, C et D dans le repère
- Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles

Exercice 7 : (5pts)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives $Z_A = 1 - i, Z_B = -i, Z_C = 2 + i$

- Ecrire une équation du 3eme degré dont Z_A, Z_B et Z_C sont les solutions
- Soit f l'application du plan complexe dans lui-même, qui à tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$ associe le point M' d'affixe $Z_{M'} = x' + iy'$ tel que
$$\begin{cases} x' = -2x + 2y + 2 \\ y' = -2x - 2y - 1 \end{cases}$$
- Montrer que l'écriture complexe f est : $z' = (-2-2i)z + 2-i$
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
- Calculer l'affixe $Z_{A'}$, image de A par f
- On note h l'homothétie de centre B et de rapport 2, Calculer l'affixe du point C' image de C par h

Exercice 8 : (5pts)

- Soit

$$P(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i \quad z \in \mathbb{C}$$

- Démontrer que $2+i$ est une solution de $p(z)$
- En déduire la résolution de l'équation $p(z)=0$

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives

$$Z_A = 2 + i, Z_B = -1 - 2i,$$

$$Z_C = -4 + i$$

- Placer les points A, B et C dans le repère ; puis calculer les distances AB et BC
 - Donner une mesure en radian de l'angle $(\vec{BA}; \vec{BC})$
 - En la nature du triangle ABC
- Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C
 - Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$
 - Préciser les éléments géométriques de r

$$4) \text{ Soit } T : M(z) \mapsto M'(z') \quad z' = ia^2z + a$$

$$a \in \mathbb{R}$$

- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2
- Déterminer les éléments caractéristiques de T pour le nombre complexe vérifiant $|a| = \sqrt{2}$ et $\arg(a) = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 9 : (5pts)

Soit l'équation (E) :

$$P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (8+4i)z - 4 + 28i = 0$$

- Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0
 - Montrer que (E) peut s'écrire sous forme $(z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta) = 0$ où α et β sont des complexes à préciser
 - Résoudre l'équation $P(z)=0$
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixe respectives $Z_A = -2i, Z_B = 3 + i, Z_C = -4 + 2i$

- Placer les points A, B et C dans le repère
- On pose $Z = \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ écrire Z sous forme Trigonométrique

- c) En déduire la nature du triangle ABC
- d) Trouver l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme
- 3) Soit S la transformation d'expression complexe $z' = \frac{4}{3}iz - \frac{8}{3} - 2i$
- a) Quelles est la nature de S, donner ses éléments caractéristiques de S
- b) Construire ABC et son image A'B'C' par S

Exercice 10 : (5pts)

- 1) On considère un nombre complexe P défini par :

$$P(z): z^3 - (6 + 6i)z^2 + 21iz + 15 - 5i = 0$$

- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (6 + 5i)z + 5 + 15i = 0$
- b) Déterminer les valeurs a et b tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$
- c) En déduire la résolution de l'équation $p(z)=0$ dans $\mathbb{C}$
- 2) On Considère les points A, B et C d'affixes respectives i ; $3+i$; $3+4i$,
- a) Calculer $U = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$
- b) En déduire la nature du triangle ABC
- c) Donner l'angle de la rotation R de centre B qui transforme A en C
- d) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B et de rapport $k=2$
- 3) Soit f l'application du plan complexe dans lui-même qui à pour tout point M d'affixe $Z = x+iy$ associé le point M' d'affixe $Z' = x'+iy'$ tel que
$$\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$
- a) Montrer que : $Z' = (1+i)Z + 3 + 2i$
- b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 11 : (5pts)

- 1) On considère un polynôme p tel que z est un élément de $\mathbb{C}$

$$P(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (8 - 2i)z - 20$$

- a) Démontrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0
- b) Déterminer les valeurs a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$
- c) En déduire la résolution de l'équation $p(z)=0$ dans $\mathbb{C}$
- 2) On Considère les points N, F et G d'affixes respectives $3-i$; $1-3i$; $2i$
- a) Placer les points N, F et G dans le repère
- b) Ecrire le nombre $\frac{Z_F - Z_N}{Z_G - Z_N}$ sous la forme algébrique
- c) En déduire la nature du triangle NFG
- 3) Déterminer l'affixe du point H image du point C parla translation du vecteur $\overrightarrow{NF}$
- 4) En déduire la nature exacte du quadrilatère NFHG
- 5) Déterminer et Construire l'ensemble (c) des points M d'affixe Z tel que $Z = \frac{z-3+i}{z-1+3i}$

Exercice 12 : (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), à tout point distinct de 4 on associe le nombre, $Z = \frac{z+4i}{z-4}$, on note A le point d'affixe 4, on pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$

- 1) Exprimer X et Y en fonction de x et y
- 2) Déterminer l'ensemble des points (H) tels que la partie imaginaire est nulle, puis construis cet ensemble
- 3) Déterminer l'ensemble des points (T) tels que la partie réelle est nulle, puis construis cet ensemble
- 4) Déterminer l'ensemble des points (S) tels que $Z=1$, puis construis cet ensemble
- 5) Déterminer l'ensemble des points (F) tels que $Z=2$, puis construis cet ensemble

Exercice 13 : (5pts)

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

- 1) Soit Q le polynôme du deuxième degré d'inconnue z à coefficient complexes, Déterminer le polynôme Q pour que

$3+i$ et $1+2i$ soient les solutions de Q

2) On considère le polynôme

$$P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + (4+3i)z - 7 + i$$

a) Déterminer les réels a , b et c tels que

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

b) En déduire la résolution de l'équation $p(z)=0$ dans $\mathbb{C}$

3) On considère les points A, et B d'affixes respectives $3+i$; $1+2i$, Déterminer la nature du triangle BOA

4) Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' tels que :

$$\overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$$

a) Montrer que $z' = -2z + 8 + i$

b) Donner les éléments caractéristiques de f

Exercice 14 : (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), à tout point distinct de O on

associe le nombre, $z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D

d'affixe respectives $Z_A = 1 + 2i$,

$Z_B = 1$ et $Z_C = 3i$, Déterminer les points A', B' et

C' images respectives de A, B et C par f ; Placer les

points A', B', C', A, B et C dans le repère

2) On pose $z = x + iy$, Déterminer l'expression analytique de $f(z) = z'$ en fonction de x et y

3) Montrer que l'ensemble M des points invariants par f est une droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$, puis tracer cette droite

4) Soit M un point quelconque du plan et M' image de M par f , Montrer que M' appartient à la droite (D)