

Exercice : 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1 $z + i + 1 = iz + 3$

4 $(9 + i)z = 3 + i - iz$

6 $\frac{4z + 1}{iz + 1} = \frac{4 + i}{3}$

2 $2iz - 3 = z - i$

5 $\frac{z + 1 - i}{z + 2 + i} = 3i$

3 $8 + 3i + iz + 7(z - 4i) = 0$

Exercice : 2

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points $M(z)$.

1 $(z - i)(\bar{z} - 1) \in \mathbb{R}$

6 $\left(\frac{z + 1 + i}{z - i}\right) \in \mathbb{R}$

10 $|2z + 1 + i| = 2$

2 $(z^2 - z) \in \mathbb{R}$

7 $\left(\frac{iz - 1}{z + 2i}\right) \in i\mathbb{R}$

11 $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$

3 $\left(\frac{1}{z} + \frac{i}{z}\right) \in \mathbb{R}$

8 $\left(\frac{z(1 + i) - i}{z + 1}\right) \in i\mathbb{R}$

12 $|z + i| = |\bar{z} - i|$

4 $\left(\frac{z + 1}{z - 2i}\right) \in \mathbb{R}$

9 $\left(\frac{z(1 + i) - i}{z + 1}\right) \in \mathbb{R}$

13 $\left|\frac{\bar{z}}{z - 2i}\right| = 3$

Exercice : 3

1 On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $a = 1, b = 5 + 2i$ et $c = -1 + 4i$.

a Écrire sous forme trigonométrique le nombre: $\frac{c - a}{b - a}$.

b Dédurre que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A .

c Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que: $|z - b| = |z - a|$.

2 On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $a = 2i, b = -\sqrt{3} - i$ et $c = \sqrt{3} - i$.

a Montrer que: $\frac{c - a}{b - a} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{AB, AC})$.

c Dédurre que le triangle ABC est équilatéral.

3 On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $a = 3 + 5i, b = 3 - 5i$ et $c = 7 + 3i$.

a Montrer que: $\frac{b - c}{a - c} = 2i$.

b Dédurre que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

4 On considère les points A, B, C et D dont les affixes sont respectivement: $a = \sqrt{3} + i, b = \sqrt{3} - i, c = 2\sqrt{3}$ et $d = 2\sqrt{3} + 2i$.

a Calculer: $\frac{c - a}{d - b}$ puis déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

b Montrer que: $\omega = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ est l'affixe du point Ω milieu du segment $[AC]$.

c Vérifier que Ω est le milieu du segment $[BD]$.

d Dédurre la nature du quadrilatère $ABCD$.

5 On considère les points A, B, C et D dont les affixes sont respectivement: $z_A = -1 + 2i, z_B = 4 + 3i, z_C = 3i$ et $z_D = 4 - 3i$.

- a** Montrer que: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1}{5}i$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = -\frac{2}{3}i$.
- b** Dédire la nature des triangles ACD et BCD .
- c** Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle (C) dont on détermine le rayon et l'afixe du centre I .
- 6** On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $z_A = 2 + i$, $z_B = 3i$ et $z_C = 1$.
- a** Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$.
- b** Dédire la nature du triangle ABC .
- c** Déterminer l'afixe du point D de façon que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.
- d** Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice : 4

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $a = 1 + mi$, $b = -1$ et $c = 2 + i$ avec $m \in \mathbb{R}$.

- 1** Déterminer m tels que les points A, B et C soit alignés.
- 2** Montrer que: $\frac{c - a}{b - a} = \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + 4} + i \frac{3m - 2}{m^2 + 4}$.
- 3** Déterminer m pour que le triangle ABC soit rectangle en A .

Exercice : 5

Soit z un nombre complexe tel que: $z \neq i$ et posons $U = \frac{1 + iz}{\bar{z} + i}$

- 1** Calculer U pour $z = 1 - i$.
- 2** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $U = 2$.
- 3** **a** Écrire $\bar{U}$ en fonction de z et $\bar{z}$.
- b** Montrer que: $\bar{U} = -U \iff (z + \bar{z})(i(z - \bar{z}) + 2) = 0$
- c** Dédire (E) l'ensemble des points $M(z)$ pour que U soit un nombre purement imaginaire.

Exercice : 6

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $a = -2i$, $b = -\sqrt{3} + i$ et $c = \sqrt{3} + i$.

- 1** Déterminer la forme trigonométrique de b et de c .
- 2** **a** Montrer que: $\frac{c - a}{b - a} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- b** Dédire la nature du triangle ABC .
- 3** Déterminer l'afixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 4** Calculer $Z = b^{10} + a^{10}$.

Exercice : 7

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points dans le plan complexe avec $z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ et $z_B = 2 - 2i$.

- 1** **a** Déterminer la forme trigonométrique de z_A et z_B .
- b** Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{OB}, \vec{OA})$.

- 2 Déterminer la forme trigonométrique de nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$, et déduire $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice : 8

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement: $a = -1 - i, b = 5 + i$ et $c = 3 + 7i$.

- 1 Calculer le nombre $\frac{b-a}{b-c}$ et déduire la nature du triangle ABC .
- 2 Déterminer d l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 3 Vérifier que $\frac{c-a}{d-b} = -i$ et donner une interprétation géométrique au résultat obtenue.
- 4 Déduire la nature de $ABCD$.

Exercice : 9

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Posons $(\forall x \in \mathbb{C}); f(z) = \frac{z}{z-i}$

- 1 Déterminer la forme algébrique du nombre $f(3+2i)$.
- 2 a Vérifier que: $\overline{f(z)} = -f(z) \iff 2z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$.
b déduire l'ensemble des points $M(z)$ dans le plan complexe tel que: $f(z) \in i\mathbb{R}$.
- 3 Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = \frac{2}{\bar{z}}$.
- 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $f(z) = z + i$.
- 5 On considère les points: $A(a), B(b)$ et $C(c)$ tel que: $a = 1 + i\sqrt{3}, b = 1 - i\sqrt{3}$ et $c = -2$
 - a Écrire a et b sous forme exponentiel.
 - b Déduire que: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1$.
 - c Vérifier que: $\frac{b-c}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis déduire la nature du triangle ABC .
 - d Déterminer l'affixe du point D tel que $ACBD$ soit un losange.

Exercice : 10

Examen National 2022 session normal

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\vec{OA}$

- 1 Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$
- 2 On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$
- 3 a Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique
b En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$
- 4 Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartient aux deux cercles (Γ) et (Γ')
 - a Vérifier que $|z+2| = 2$

- b** Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)
- c** En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice : 11

Examen National 2021 session normal

- 1** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
- 2** Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - a** Écrire a sous forme algébrique .
 - b** Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$.
- 3** Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.
- 4** Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a** Écrire z' en fonction de z et a
 - b** Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R , montrer que $d = a + 1$.
 - c** Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange.
- 5**
 - a** Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$
 - b** Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.
 - c** Déduire une mesure de l'angle $(\widehat{BI, BD})$

Exercice : 12

Examen National 2021 session rattrapage

- 1** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$
- 2** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 3 + 2i$; $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$.
 - a** Écrire $\frac{c - b}{a - b}$ sous forme trigonométrique
 - b** En déduire la nature de triangle ABC
- 3** Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R , et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.
 - a** Écrire z' en fonction de z
 - b** Vérifier que C est l'image de point A par R .
- 4**
 - a** Montrer que les point A, C et D sont alignés.
 - b** Déterminera le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D
 - c** Déterminera l'affixe m du point E pour que la quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.
- 5**
 - a** Montrer que $\frac{d - a}{m - b}$ est un nombre réel.
 - b** En déduire que quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.