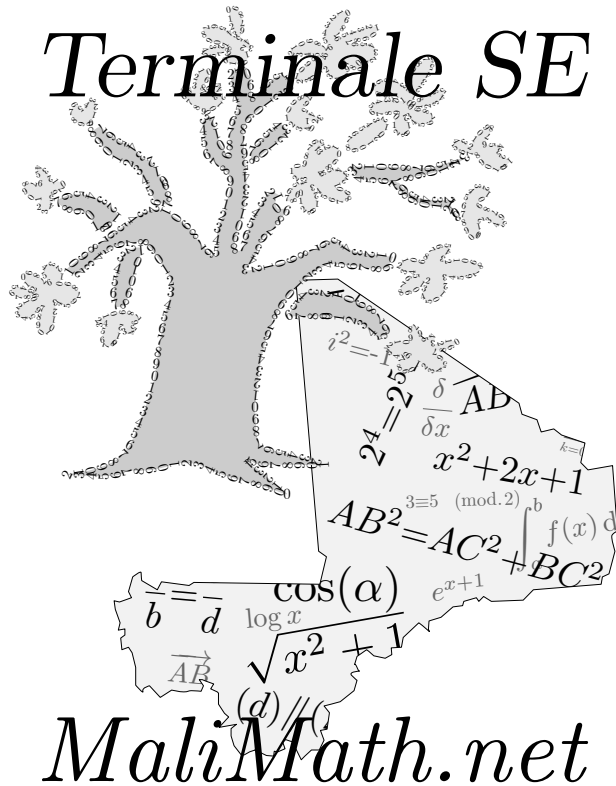


Cahier d'exercices

Terminale SE



MaliMath.net

Terminale SE

Sommaire :

A. Nombres complexes	1
B. Arithmétique	11
C. Fonctions numériques	20
D. Fonction logarithme népérien	25
E. Fonctions exponentielles	28
F. Intégration	38
G. Suites numériques	49
H. Equations différentielles	54
I. Probabilité	58
J. Probabilité conditionnelle	62
K. Applications affines	65
L. Similitudes	68

A. Nombres complexes:

Exercice A.1

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

- | | |
|--|------------------------------------|
| a. $z_1 = 3 \cdot (2 - i) + i \cdot (3 + 2i)$ | b. $z_2 = (5 + 2i) \cdot (1 - i)$ |
| c. $z_3 = -5 \cdot i \cdot (5 - 4i) - 3 \cdot i$ | d. $z_4 = (5 + 2i)^2$ |
| e. $z_5 = (2 - i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i)^2$ | f. $z_6 = (5 + 2i) \cdot (5 - 2i)$ |

Exercice A.2

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| a. $z_1 = \frac{1+i}{i}$ | b. $z_2 = \frac{1}{1-i}$ | c. $z_3 = \frac{-2+i}{2+i}$ |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|

Exercice A.3

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = 5 - 2i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

- | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| a. $z_1 + z_2$ | b. $z_1 - z_2$ | c. $z_1 - 2 \cdot z_2$ |
| d. $z_1 \cdot z_2$ | e. $\frac{z_1}{z_2}$ | f. $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$ |

Exercice A.4

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| a. $z_1 = \frac{2}{i}$ | b. $z_2 = \frac{3}{2-4i}$ | c. $z_3 = \frac{-2}{1+i}$ |
| d. $z_4 = \frac{3-2i}{5+3i}$ | e. $z_5 = \frac{2+3i}{1-i}$ | f. $z_6 = \frac{2}{2+\frac{1}{1+i}}$ |

Exercice A.5

Donner la valeur de $Re(z)$ et $Im(z)$ pour chacun des complexes ci-dessous :

- | | | |
|------------------|---------------------------|---|
| a. $z = (2+i)^2$ | b. $z = \frac{3-4i}{1+i}$ | c. $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$ |
|------------------|---------------------------|---|

Exercice A.6

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$$z = (x + 2i) \cdot (1 - xi)$$

- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .
- a. Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel ?
b. Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un imaginaire pur ?

Exercice A.7

- Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
 $A = 1 + i + i^2 + i^3$
- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe :
 $B = 1 + i + i^2 + \dots + i^{99}$

Exercice A.8

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

- | | | |
|----------------------|------------------------|---------------------------|
| a. $z = 1 + i$ | b. $z = 2i - 3$ | c. $z = i \cdot (1 + 2i)$ |
| d. $z = \frac{1}{i}$ | e. $z = \frac{2}{2-i}$ | f. $z = (1-i)(1+i)$ |

Exercice A.9

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous :

- sans calcul, donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre z ;
- puis, donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\bar{z}$.

- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| a. $z = (2-i)(5+3i)$ | b. $z = i \cdot (3+2i) - 3 + i$ |
| c. $z = \frac{5-2i}{i-2}$ | d. $z = \frac{(3-2i)(1-i)}{1+i}$ |

Exercice A.10

Soit z un nombre complexe.

1. Démontrer que les deux nombres suivants sont des réels :
 $z + \bar{z}$; $z \cdot \bar{z}$
2. Démontrer que le nombre complexe $z - \bar{z}$ est un imaginaire pur.

Exercice A.11

1. Donner l'écriture algébrique du nombre z_1 défini par :
$$z_1 = \frac{3 - 2i}{1 + i}$$
2. On considère le nombre z_2 défini par : $z_2 = \frac{3 + 2i}{1 - i}$
 - a. Que peut-on dire des nombres complexes z_1 et z_2 ?
 - b. En déduire l'expression de $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice A.12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm)

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B .
2. On note A' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.

Exercice A.13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A , B et C d'affixes respectives :
 $z_A = -11 + 4i$; $z_B = -3 - 4i$; $z_C = 5 + 4i$
2. Calculer le module et un argument du quotient $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC .
3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathcal{R}$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Montrer que l'affixe de E vérifie : $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$.
Placer le point E .
4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre B et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
Placer le point D .

Exercice A.14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives :

- $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2i$
1.
 - a. Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
 - b. Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
 - c. Déterminer la nature du triangle OAB .
 2. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B . Pour tout point M d'affixe z , on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M' .
 - a. Calculer un argument du quotient $\frac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.
 - b. En déduire l'écriture complexe de rotation r .
 3. Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O . Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_C son affixe.
 - a. Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r .
 - b. Calculer l'affixe z_I du milieu I de $[AB]$.
 - c. Déterminer la nature du quadrilatère $OACB$.
 - d. En déduire que I est le milieu de $[OC]$ puis montrer que l'affixe de C est :
 $z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i$
 4. Soit D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$.
 - a. Justifier que le point D appartient au cercle Γ . Placer D sur la figure.
 - b. Placer D' image de D par la rotation r définie à la question 2.
On note $z_{D'}$ l'affixe de D' . Montrer que :
 $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$.
 5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

Exercice A.15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On pose : $a = 3b = 5 - 2i$; $c = 5 + 2i$

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives a , b et c .

Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
2. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe :
$$\frac{z - 3}{z - 5 + 2i}$$
3. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z - 3}{z - 5 + 2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

Exercice A.16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

Soient les points A , B et C d'affixes respectives :

i ; $1 + i$; $-1 + i$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A , d'affixe z , associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{i \cdot z + 2}{z - i}$$

1.
 - a. Déterminer les images de B et de C par l'application f .
 - b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , on a la relation :
 $(z' - i)(z - i) = 1$

- c. Soit D le point d'affixe $1+2i$. Placer les points A , B , C et D sur une figure (*unité graphique 4 cm*).

Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l'application f .

2. Soit R un nombre réel strictement positif.
Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

Exercice A.17

La plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
 $z^2 + 4z + 8 = 0$

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives :
 $a = 2 - 2i$; $b = -a$

Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

- a. Déterminer l'affixe c du point C , image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est :
 $d = 2 - 6i$

- c. Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α , le barycentre du système :
 $\{(A; 1) ; (B; -1) ; (C; \alpha)\}$

- a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

- b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

- c. Pour quelle valeur de α a-t-on : $G_\alpha = D$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} \right\| = 4 \cdot \sqrt{2}$$

Exercice A.18

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2i \quad ; \quad z_B = -\sqrt{3} + i \quad ; \quad z_C = \sqrt{3} + i$$

1. Ecrire z_A , z_B et z_C sous forme exponentielle.

2. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A , B et C .

3. Faire une figure et placer le point A , tracer le cercle Γ puis placer les points B et C .

4. a. Ecrire le quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

- b. En déduire la nature du triangle ABC .

5. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians.

- a. Montrer que le point O' , image de O par r , a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.

- b. Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ .

- c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .

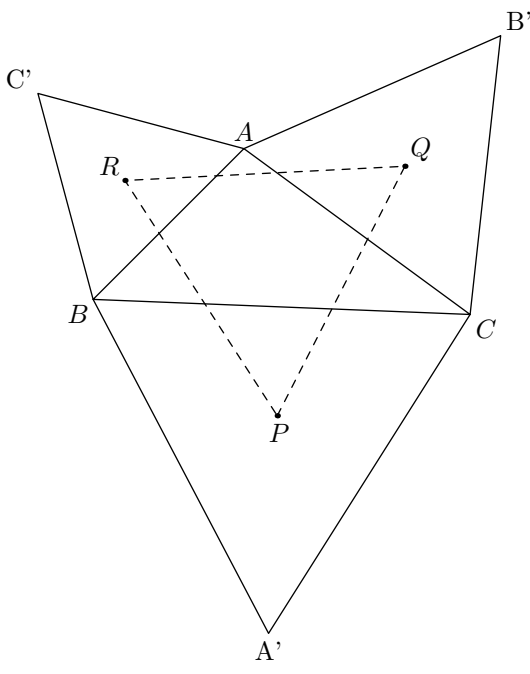
- d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B .

6. a. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :
 $|z| = |z + \sqrt{3} + i|$

- b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E) .

Exercice A.19

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA' , ACB' et ABC' . On considère respectivement les points P , Q et R centres de gravités respectifs des triangles BCA' , ACB' et ABC'



On note a , b , c , a' , b' , c' , p , q et r les affixes respectives des points A , B , C , A' , B' , C' , P , Q et R .

1. a. Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A par une rotation dont on précisera la mesure de l'angle et le centre.

- b. Montrer que : $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3. En déduire que les triangles ABC , $A'B'C'$ et PQR ont même centre de gravité.

4. Montrer que :

$$3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b).$$

On admettra que, de même :

$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$

5. Justifier les égalités suivantes :

$$a - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b' - c) \quad ; \quad b - a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a')$$

$$c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b)$$

6. Déduire des questions 4. et 5. que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice A.20

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On pose :

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases} \quad \text{où } x, x', y, y' \text{ sont des nombres réels.}$$

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z .

- Montrer que les vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re(z'\overline{z})=0$.
- Montrer que les points O , M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im(z'\overline{z})=0$.

Applications

- N est le point d'affixe z^2-1 . Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
- On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2}-1$.
On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O , N et P soient alignés.
 - Montrer que : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}=-\overline{z}^2\cdot\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.
 - En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice A.21

Les parties A et B sont indépendantes

On considère l'équation (E) : $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A

- Montrer que (E) admet une solution réelle, noté z_1 .
 - Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :
 $z^3-(4+i)\cdot z^2+(7+i)\cdot z-4=(z-z_1)\cdot(z-2-2i)\cdot(az+b)$
- Résoudre (E) .

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les trois points A , B et C d'affixes respectives 1 , $2+2i$ et $1-i$.

- Représenter A , B et C .
- Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC .
- Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
- Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre C . Déterminer l'affixe de D .
- Quelle est la nature de $OCDB$?

Exercice A.22

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est compt  e 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapoort   à une repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

- Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :
 - $|z-2+5i|^2=3$;
 - $|z+2-5i|^2=3$;
 - $|z-2+5i|^2=3$.
- On considère trois points A , B et C d'affixes respectives a , b et c , deux à deux distincts et tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
 - M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
 - M appartient aux cercles de diamètres repectifs $[AC]$ et $[AB]$;
 - M est l'orthocentre du triangle ABC .
- Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $5+4i$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A , B et C et on note z_G son affixe.
 - $|z_G-3-2,5i|=\frac{5}{6}$;
 - $z_G-(1+i)=\frac{1}{3}\cdot(4+3i)$;
 - $z_G-(3+2,5i)=\frac{1}{3}\cdot(4+3i)$

Exercice A.23

Le plan est rapporté au repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ orthonormal direct (*unité graphique 2 cm*).

On compl  tera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe $2i$.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=i\cdot z$.

- Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
 - Déterminer l'affixe du point A' , image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+i$.
 - Montrer que les points A , I et A' sont alignés.
- Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M , I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
 - Vérifier que le point A appartient à (Γ) .
 - Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ) .
- Soit B le point d'affixe $2+2i$ et B' l'image de B par f .
 - Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.
 - Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. Déterminer la nature du quadrilatère $OACA'$.

Exercice A.24

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Sit le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé dorect d'origine O .

- Une solution de l'équation $2 \cdot z + \overline{z} = 9 + i$ est :

a. 3

b. i

c. $3 + i$
- Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

a. $|z| + 1$

b. $|z - 1|$

c. $|i \cdot \overline{z} + 1|$
- Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

a. $-\frac{\pi}{3} + \theta$

b. $\frac{2\pi}{3} + \theta$

c. $\frac{2\pi}{3} - \theta$
- Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

a. $n = 3$

b. $n = 6 \cdot k + 3$, avec k relatif

c. $n = 6k$ avec k relatif
- Soit A et B deux points d'affixe respective i et -1 . L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

a. La droite (AB)

b. Le cercle de diamètre $[AB]$

c. La droite perpendiculaire à (AB) passant par O .
- Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + i \cdot y$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4 \cdot i|$ a pour équation :

a. $y = -x + 1$

b. $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$

c. $z = 1 - i + 5 \cdot e^{i \cdot \theta}$
- Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3 \cdot i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :

a. $1 - 4 \cdot i$

b. $-3 \cdot i$

c. $7 + 4 \cdot i$
- L'ensemble des solutions dans $\mathcal{C}$ de l'équation $\frac{z - 2}{z - 1} = z$ est :

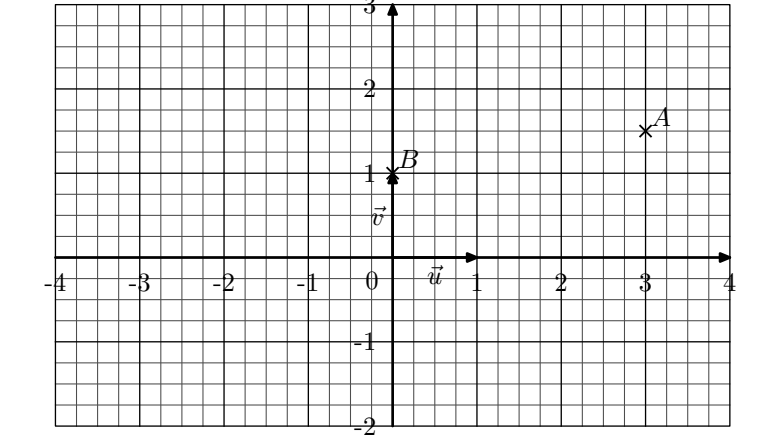
a. $\{1 - i\}$

b. L'ensemble vide.

c. $\{1 - i ; 1 + i\}$

Exercice A.25

On considère le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ ainsi que les points A et B représentés ci-dessous :



On note z_A et z_B les affixes respectives des points A et B .

- Donner les écritures algébriques des affixes des points A , B .
- a. Placer le point C d'affixe $-z_A$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en C ?
- a. Placer le point D d'affixe $\overline{z_A}$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en D ?
- a. Placer le point E d'affixe $-\overline{z_A}$.

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en E ?
- a. Placer le point F d'affixe $\frac{1}{2} \cdot z_A$.

b. Que peut-on dire de la position du point F ?
- a. Placer le point G d'affixe $z_A + (-2 - 2 \cdot i)$.

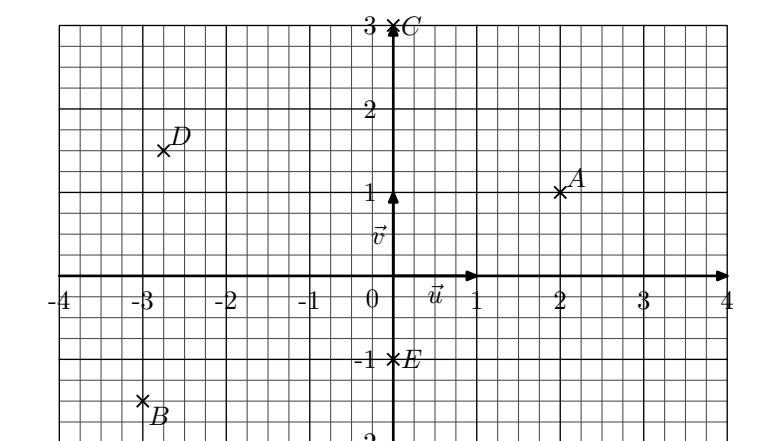
b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en G ?
- On considère le point H d'affixe z_H vérifiant l'égalité :
$$z_H - z_B = \frac{1}{2} \cdot (z_A - z_B)$$

a. En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe z_H du point H .

b. Que peut-on de la position du point H ?

Exercice A.26

On considère le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ et les cinq points représentés ci-dessous :

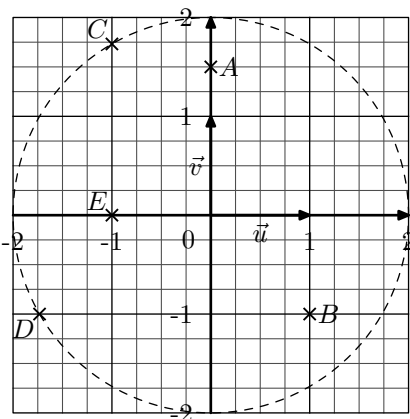


- Déterminer les écritures algébriques des affixes des points A , B , C , D , E .
- Placer dans le plan les points F , G , H et I d'affixes respectives z_1 , z_2 , z_3 et z_4 définies par :
$$z_1 = 3 - i \qquad ; \qquad z_2 = \frac{3}{2} \cdot i$$
$$z_3 = -\frac{7}{4} + 2 \cdot i \quad ; \quad z_4 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \cdot i$$
- Déterminer l'affixe du milieu du segment $[EF]$.

Exercice A.27

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct représenté ci-dessous :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2 est représenté en pointillé; les points C et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.



- Déterminer les modules et les arguments des affixes des points A , B , C , D et E .
- Placer les points F et G d'affixes respectives z et z' vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice A.28

- Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $z_2 = \sqrt{3} + i$

c. $z_3 = -1 - i$

d. $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes z_5 et z_6 définis par :

a. $|z_5| = 5 \quad ; \quad \arg(z_5) = -\frac{\pi}{3}$

b. $|z_6| = 2 \quad ; \quad \arg(z_6) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice A.29

Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes :

a. $z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$

b. $z_2 = -3 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

c. $z_3 = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$

d. $z_4 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

Exercice A.30

On considère les nombres complexes ci-dessous :

$$z_1 = 1 + 2 \cdot i \quad ; \quad z_2 = 5 - 2 \cdot i \quad ; \quad z_3 = -1 - 2 \cdot i$$

- Déterminer le module de chacun des nombres complexes ci-dessus.
- Déterminer, au centième de radian près, la valeur de l'argument de chacun des nombres complexes ci-dessus.

Exercice A.31

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \quad \text{à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

- Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad ; \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z :

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.

2. Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.

3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice A.32

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $(O; I; J)$ (*unité graphique : 2 cm*). A tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z , affixe du point M .

- a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = -1 \quad ; \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

- b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3 , z_2^3 , z_3^3 des nombres complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3 , de z_2^3 , de z_3^3 .

- a. Si $z = x + iy = \rho \cdot e^{i\theta}$ est un nombre complexe (*avec y et θ réels et ρ réels supérieur à zéro*), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et de y , puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ .

- b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

- c. Déterminer et tracer l'ensemble (E') des points M d'affixe z , caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leq z^3 \leq 8$.

Exercice A.33

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a. $1 - 2 \cdot i$

b. $-5 \cdot i$

c. $(3 - 2 \cdot i)(2 + i)$

d. $-i \cdot (1 - 2 \cdot i)$

e. $\frac{1 + i\sqrt{3}}{3 \cdot i}$

f. $\frac{3 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$

Exercice A.34

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = 2 + 2 \cdot i \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

- Ecrire Z sous forme algébrique.
- Donner les modules et les arguments de z_1 , z_2 et Z .
- En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice A.35

On considère le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + i \quad ; \quad z_B = -3 \cdot i \quad ; \quad z_C = 3 - 2 \cdot i \quad ; \quad z_D = 3 + 2 \cdot i$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$$

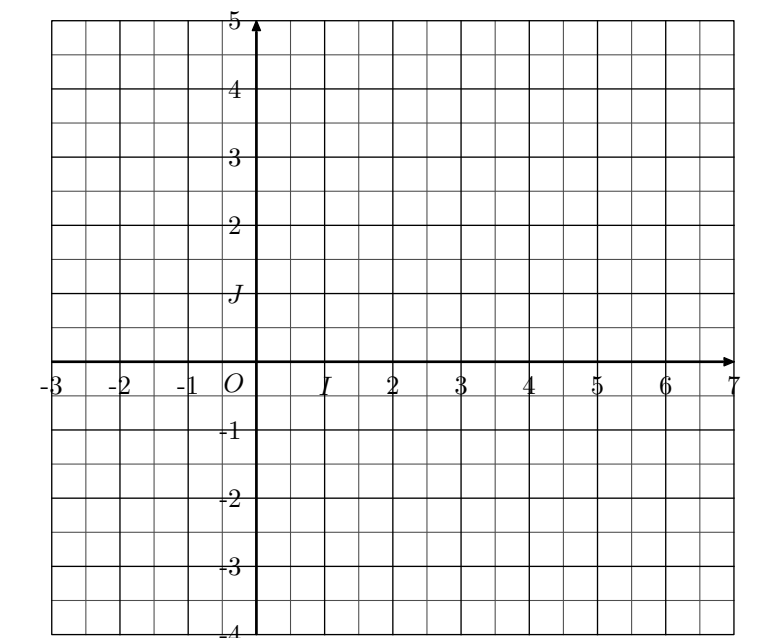
- b. En déduire l'écriture trigonométrique du complexe Z .
2. a. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
- b. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ?

Exercice A.36

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + i \quad ; \quad z_B = -3 \cdot i \quad ; \quad z_C = 6 + 5 \cdot i$$

1. Placer ces trois points dans le repère ci-dessous :



2. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
3. On considère le point D d'axe z_D où :

$$z_D = 4 - i$$
 - a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z définie par :

$$Z = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$$
 - b. Justifier que la demi-droite $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$.

Exercice A.37

On considère le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2 \cdot i \quad ; \quad z_B = -3 - 4 \cdot i \quad ; \quad z_C = -2\sqrt{3} - i \cdot \sqrt{3}$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$
 - b. En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z .
2. a. Déduire des questions précédentes que le triangle ABC est un triangle isocèle en A .
- b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice A.38

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère les deux points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + 2i \quad ; \quad z_B = 1 - i$$
 - a. Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$.
 - b. En déduire la nature du triangle OAB .
2. On considère les points C, D, E d'affixes respectives :

$$z_C = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} \cdot i \quad ; \quad z_D = 2 - i \quad ; \quad z_E = i$$
 - a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre $\frac{z_C - z_E}{z_D - z_E}$.
 - b. En déduire la nature du triangle CDE .

Exercice A.39

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

- a. $z_1 = 5$
- b. $z_2 = -3$
- c. $z_3 = -3 \cdot i$
- d. $z_4 = -3 + 3 \cdot i$
- e. $z_5 = -2\sqrt{3} - 2 \cdot i$
- f. $z_6 = \sqrt{3} - 3 \cdot i$

Exercice A.40

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

- a. $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi}$
- b. $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$
- c. $z_3 = 2\sqrt{3} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$

Exercice A.41

On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :

$$z_1 = \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{6} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

- a. $z_1 \cdot z_2$
- b. $\frac{z_1}{z_2}$
- c. $z_1 + z_2$

Exercice A.42

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z - 2 \cdot i)(z^2 - 2 \cdot z + 2) = 0$$

Donner l'écriture algébrique et l'écriture exponentielle des solutions de cette équation (*justifier les réponses*).

Exercice A.43

1. Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle :

$$z = r \cdot e^{i \cdot \theta} \quad \text{où } r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

- a. $\bar{z}$
- b. $-z$
2. a. Justifier l'égalité suivante :

$$3 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = -3 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}}$$
 - b. En déduire l'écriture exponentielle de :

$$2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}} + 3 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$$

Exercice A.44

Dans $\mathbb{C}$, on considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_A = 1 - i \quad ; \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

1. Déterminer le module et un argument de z_A .
2. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous écriture algébrique.

3. Montrer que : $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

4. En déduire l'écriture exponentielle de z_B .

Exercice A.45

- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par $z = \frac{1-i}{1+i}$
- Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1-i$; $z_2 = 1+i$
 - En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe z .
- Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe z_3 défini par $z_3 = \frac{1+i}{1-\sqrt{3} \cdot i}$

Exercice A.46

On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme trigonométrique :

$$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}}$$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

$$\text{a. } z_1 \cdot z_2 \qquad \text{b. } (z_1)^2 \cdot z_2 \qquad \text{c. } \frac{z_2}{(z_1)^2}$$

Exercice A.47

- Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1 = -2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot i$
Déterminer l'écriture exponentielle de ce nombre.
 - Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :
 $|z_2| = \sqrt{2}$; $\arg(z_2) = \frac{3}{4} \cdot \pi$
Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2
- Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\text{a. } z_1 \cdot z_2 \qquad \text{b. } z_1 + z_2$$

Exercice A.48

- On définit les deux nombres complexes z et z' par :
 $z = 3 - 4 \cdot i$; $z' = -2 + i$
Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :
 $\text{a. } z + \overline{z'} \qquad \text{b. } \overline{z} \cdot z' \qquad \text{c. } \overline{z'} \cdot \overline{z + i}$
- Considérons les deux nombres complexes z et z' admettant pour écriture algébrique :
 $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$; $z' = e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$
Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :
 $\text{a. } -z \qquad \text{b. } \overline{z} \qquad \text{c. } z \cdot z' \qquad \text{d. } \frac{(\overline{z'})}{z}$

Exercice A.49

- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
 $z^2 - 2z + 4 = 0$
Les solutions seront notées z et z' , z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle des solutions de cette équation.
- Donner l'écriture exponentielle exacte du nombre complexe $(z')^2$ puis son écriture algébrique.

Exercice A.50

On considère le nombre complexe : $a = (-\sqrt{3} + i)^{2011}$.
Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :
“Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.”

Exercice A.51

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

- Soit $z = 3 + i \cdot \sqrt{3}$.
Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, $z^{3 \cdot n}$ est imaginaire pur.
- Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 2 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors :
 $|i + z| = 1 + |z|$
- Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 3 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice A.52

Rechercher tous les couples $(z_1 ; z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2 \cdot z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenue.

Exercice A.53

On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i \cdot \sqrt{2}}{2} \quad ; \quad z_2 = 1 - i$$

- Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2 .
- Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \cos \frac{\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{\pi}{12}$$
 - On définit le nombre Z par la relation : $Z = \frac{z_1}{z_2}$
Déterminer l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z .
- En déduire que :
$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad ; \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$
- On considère l'équation d'inconnue réelle x :
 $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \sin x = 2$
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice A.54

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a. } z + \overline{z} = 6 & \text{b. } z + \overline{z} = i \\ \text{c. } z + 2 \cdot \overline{z} = 8 + i & \text{d. } i \cdot \overline{z} + 2 \cdot (z - 5) = 0 \end{array}$$

Exercice A.55

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
 $x^2 + x + 1 = 0$

2. On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Déterminer l'écriture algébrique des deux nombres complexes : j^2 ; j^3
 - Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $1+j+j^2$; $1+\overline{j}+\overline{j}^2$
 - Dans $\mathbb{C}$, de quelle équation du second degré, le nombre j et $\overline{j}$ sont-ils solutions ?
3. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$(1+j)^{2n+1} = -j^{n+2}$$

Exercice A.56

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
- $$(E) : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$$
- Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive : $(z-2)(z^2 + a \cdot z + b) = 0$
 - Résoudre (E) .
2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :
- $$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$$
- On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M . Montrer que :
 M appartient à (H) si, et seulement si, $x^2 - y^2 = 4$
 - Soient A , B et C les points d'affixes respectives :
 2 ; $-3 - i \cdot \sqrt{5}$; $-3 + i \cdot \sqrt{5}$
Vérifier que A , B et C appartiennent à (H) .

Exercice A.57

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a. $2z^2 + 2z + 1 = 0$ | b. $-z^2 + 2z - 3 = 0$ |
| c. $z^2 + 3z + 3 = 0$ | d. $-z^2 - 3z - 2 = 0$ |

Exercice A.58

- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
- $$(E) : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$$
- Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :
 $(E) : (z-2)(z^2 + a \cdot z + b) = 0$
 - Résoudre l'équation (E) .

Exercice A.59

On considère la fonction complexe définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ par la relation :

$$f: z \mapsto \frac{z-4}{z-2}$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par cette fonction.

Exercice A.60

- On considère l'équation (E) :
- $$z^3 - (4+i) \cdot z^2 + (7+i) \cdot z - 4 = 0$$
- où z désigne un nombre complexe.
- Montrer que (E) admet une solution réelle, noté z_1 .
 - Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
 $z^3 - (4+i) \cdot z^2 + (7+i) \cdot z - 4 = (z-z_1)(z-2-2i)(a \cdot z + b)$
 - Résoudre (E) .

Exercice A.61

- Pour tout nombre z , on pose : $P(z) = z^4 - 1$.
- Factoriser $P(z)$ en produit de facteurs du premier degré.
 - En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(z)=0$, d'inconnue z .
 - Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :
 $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

Exercice A.62

- Déterminer les racines du polynôme :
 $P = i \cdot z^2 - 2 \cdot i \cdot z + 3 \cdot i$
- On considère le polynôme :
 $Q = -i \cdot z - 2 \cdot z - i + 17$ $Q = i \cdot z^3 + (1+i) \cdot z^2 - (2-3i) \cdot z + 3 + 9 \cdot i$
 - Vérifier que le nombre complexe z_1 est une racine du polynôme Q où :
 $z_1 = -3 + i$
 - Déterminer la seconde racine de ce polynôme du second degré.
 - Donner la forme factorisée du polynôme Q .

Exercice A.63

- Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) définie par :
 $(E) : z + 2 - i = (1+i) \cdot z$
Montrer que le nombre complexe $-1-2i$ est solution de l'équation (E) .
- Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (F) définie par :
 $(F) : (z-1+2i)(z+2i) = z^2 - i$
Montrer que le nombre complexe $-i$ est solution de l'équation (F) .

Exercice A.64

On considère les points A , B , C d'affixes respectives :

$$z_A = 1+3 \cdot i \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2}+2 \cdot i \quad ; \quad z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\right)$$

Soit I le point du plan d'affixe $z_I = 2 \cdot i$

Montrer que les points A , B , C appartiennent à un même cercle de centre I . Préciser le rayon de ce cercle.

Exercice A.65

On considère les points B et C d'affixes respectives $-i$ et $7 \cdot i$.

Montrer que tout point M d'affixe z vérifiant :

$$z = 3 \cdot i + 4 \cdot e^{i \cdot \theta} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$.

Exercice A.66

- Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- On considère les points A et B d'affixes respectives :
- $$z_A = -1 + i \cdot \sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - i \cdot \sqrt{3}$$
- Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient :
 $2(z + \overline{z}) + z \cdot \overline{z} = 0$
est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon. Construire Γ_2 .
 - Vérifier que les points A et B sont des éléments de Γ_2

Exercice A.67

On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $z_A = 4 - \sqrt{3} \cdot i$; $z_B = (4 - \sqrt{3}) + i \cdot (1 - \sqrt{3})$
 $z_C = -1 + 2 \cdot i$; $z_D = 2\sqrt{3} - 1$

Etablir que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. On considère les points E, F, G et H d'affixes respectives :
 $z_E = 5 - 3 \cdot i$; $z_F = 4 + i \cdot (-3 + \sqrt{3})$
 $z_G = i$; $z_H = -2\sqrt{3} - i$

Etablir que les droites (EF) et (GH) sont perpendiculaires.

Exercice A.68

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On pose :

$$z = x + i \cdot y \quad ; \quad z' = x' + i \cdot y'$$

où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z .

1. Exprimer le complexe $\bar{z} \cdot z'$ en fonction de x, x', y, y' .
2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re(z' \cdot \bar{z}) = 0$.
- b. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im(z' \cdot \bar{z}) = 0$

Exercice A.69

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2 \cdot i$

1. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (*unité graphique 1 cm*) qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I , tracer le cercle Γ , puis construire le point A .

2. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe :

$$z_B = -1 + i \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

Justifier que le point B appartient au cercle Γ .

3. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I .
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Exercice A.70

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. Décrire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

- a. $|z| = 1$ b. $|z| \leq 3$ c. $1 \leq |z| \leq 2$
- d. $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ e. $|\arg(z)| = \frac{\pi}{4}$

Exercice A.71

On considère le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
 $z_A = 1 + i$; $z_B = 2 + i \cdot (\sqrt{3} + 1)$; $z_C = (1 - \sqrt{3}) + i \cdot 2$
- a. Déterminer l'écriture algébrique du quotient :
 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
- b. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
- c. Etablir que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. On considère les points D, E, F d'affixes respectives :
 $z_D = 4 - \sqrt{3} \cdot i$; $z_E = (4 + \sqrt{3}) + i \cdot (-1 - \sqrt{3})$
 $z_F = -(\sqrt{3} + 2) \cdot i + 4$
- a. Déterminer l'écriture algébrique du quotient :
 $\frac{z_E - z_D}{z_F - z_D}$
- b. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
- c. Etablir que le triangle DEF est équilatéral.

Exercice A.72

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2 \cdot z^2 - 6 \cdot z + 9 = 0$

On désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives :

$$z_P = \frac{3}{2} \cdot (1 + i) \quad ; \quad z_Q = \frac{3}{2} \cdot (1 - i) \quad ; \quad z_R = -2 \cdot i \cdot \sqrt{3}$$

2. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q . Vérifier que l'affixe z_S du point S est :

$$z_S = 3 + i \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3)$$

Exercice A.73

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, unité graphique 1 cm.

Soit A le point d'affixe $3 \cdot i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3 \cdot i \cdot z - 7}{z - 3 \cdot i}$$

Recherche des points invariants par f .

1. Développer $(z - 7 \cdot i)(z + i)$.
2. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.

Exercice A.74

Dans le plan complexe, on considère la transformation f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + i \cdot \bar{z} + 1 - i$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives :
 $3 + 2 \cdot i$; $-3 \cdot i$
- Déterminer l'image de ces deux points par la transformation f .
2. a. Soit M un point du plan. On note $a + i \cdot b$ l'affixe du point M . Exprimer en fonction de a et de b la partie réelle et la partie imaginaire du point M' .
- b. Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des réels.
- c. Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des imaginaires.

Exercice A.75

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

(unité 1 cm).

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A , B , S et Ω d'affixes respectives :

$$a = -2 + 4i \quad ; \quad b = -4 + 2i$$

$$s = -5 + 5i \quad ; \quad w = -2 + 2i$$

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.

On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h ?

- Déterminer l'écriture complexe de h .
 - Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4 + 2i$ et que le point D a pour affixe $d = -2 - 4i$.
- Démontrer que les points A , B , C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- Démontrer que la droite $(S\Omega)$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Soit P le milieu du segment $[AC]$.
 - Déterminer l'affixe p du point P .
 - Démontrer que $\frac{\omega - p}{d - b} = -\frac{1}{2} \cdot i$. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{P\Omega})$.
- Soit Q le milieu du segment $[BD]$.
Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

B. Arithmétique:

Exercice B.1

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le $PGCD$ des nombres a et b :

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| a. $a = 354$; $b = 20$ | b. $a = 1\,456$; $b = 256$ |
| c. $a = 17$; $b = 3941$ | d. $a = 256\,419$; $b = 3\,866$ |

Exercice B.2

Dans chaque cas, à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers, déterminer le $PGCD$ du couple $(a; b)$ d'entiers :

- $a = 35 \times 21$; $b = 36 \times 25$
- $a = 6^2 \times 12$; $b = 21^4 \times 15^2$
- $a = 35\,280^{201}$; $b = 6\,804^{131}$

Exercice B.3

Soit n un entier naturel inférieur à 120. Déterminer l'ensemble des valeurs de n tels que :

$$\text{pgcd}(n; 120) = 6$$

Exercice B.4

Soit $a \in \mathbb{N}$, considérons l'expression : $(E) : a^4 - 3a^2 + 1$

- Etablir l'égalité suivante :
$$a^4 - 3a^2 + 1 = (a^2 - a - 1) \cdot (a^2 + a - 1)$$
- Résoudre les équations suivantes :
$$a^2 - a - 1 = 1 \quad ; \quad a^2 + a - 1 = 1$$
 - Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a , l'expression (E) définit un nombre premier.

Exercice B.5

- Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
$$(E) : a^4 - a^3 - 5a^2$$
 - Factoriser l'expression (E) comme un produit de deux polynômes du second degré.
 - En déduire l'unique valeur de a afin que l'expression (E) définisse un nombre premier.
- Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
$$(F) : a^4 - 3a^2$$

Justifier que le nombre (F) ne peut être un nombre premier.

Exercice B.6

Soit n un entier naturel. On considère le nombre A défini par :

$$A = 2^3 \times 3^n \times 5^n$$

- Déterminer le nombre de diviseurs du nombre A dans les cas suivant :
$$n = 0 \quad ; \quad n = 1 \quad ; \quad n = 2$$
 - Déterminer une expression en fonction de n donnant le nombre de diviseurs du nombre A .
- Combien de diviseurs admet le nombre 6 075 000.

Exercice B.7

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$.

- Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
- Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
- Quelle est la parité de p et de q ?

Exercice B.8

- Soit x un nombre réel.
 - Montrer que :
$$x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$
 - En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficient entiers.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux entiers suivants :
$$A = n^2 - 2n + 2 \quad ; \quad B = n^2 + 2n + 2$$
 - Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
 - Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.
 - Montrer que, tout diviseur commun de A et de B , divise $4n$.

Exercice B.9

On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (*c'est à dire autres que lui-même*).

- Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
 - Vérifier que ces deux nombres peuvent s'écrire sous la forme $2^n(2^{n+1} - 1)$ où $2^{n+1} - 1$ est premier.
- Nous allons montrer que tout nombre de cette forme est un nombre parfait.
 - Soit p un nombre premier et a le nombre $a = 2^n \cdot p$.
Quels sont ses diviseurs propres ? Calculer leur somme en fonc-

tion de n et p .

- b. Supposons de plus que $p = 2^{n+1} - 1$.

Exprimer la somme des diviseurs propres du nombre a en fonction de n où :

$$a = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

- c. En déduire que a est parfait.

3. Enoncer le résultat démontré.
Donner deux autres nombres parfaits.

En revanche, aucun nombre parfait impair n'est connu pour l'instant.

Exercice B.10

1. Soit x et p étant deux entiers naturels, calculer la somme :
 $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^p x^p$

2. Démontrer que, quels que soient les entiers naturels x et n , l'entier $x^{2n+1} + 1$ est multiple de $x + 1$.

On remarquera que si k est impair alors $(2^q)^k + 1$ est divisible par $2^q + 1$.

3. Soit m un entier naturel. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit un nombre premier est que m soit une puissance de 2.

Exercice B.11

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Pour tout entier naturel n non nul :

1. " $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5".

2. " $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7".

Exercice B.12

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants :

- a. 8232 b. 1750 c. 1053

Exercice B.13

1. a. Montrer que $3n^2 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$ pour tout entier naturel n .

- b. Montrer que $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul pour tout entier naturel n .

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a , b et c , l'égalité suivante est vraie :

$$\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(bc - a; b)$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 2, l'égalité est vraie :

$$\text{pgcd}(3n^3 - 11n; n + 3) = \text{pgcd}(48; n + 3)$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

- b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.

Exercice B.14

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies par :

• $x_0 = 3$; $x_{n+1} = 2 \cdot x_n - 1$

• $y_0 = 1$; $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = 2^{n+1} + 1$$

2. a. Calculer le PGCD de x_8 et x_9 , puis celui de x_{2002} et x_{2003} . Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?

- b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2x_n - y_n = 5$$

- b. Exprimer y_n en fonction de n .

- c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

- d. On note d_n le PGCD de x_n et de y_n pour tout entier naturel n .

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice B.15

1. Sans la calculatrice, effectuer la division euclidienne de 372 par 15.

2. Avec la calculatrice, déterminer la division euclidienne de 37 852 par 23.

3. Utilise les égalités suivantes pour répondre aux questions suivantes :

$$2\,456 = 17 \times 143 + 25 \quad ; \quad \frac{32\,247}{143} = 225 + \frac{72}{143}$$

$$\frac{516}{43} = 12 \quad ; \quad \frac{674}{24} = 28 + \frac{1}{12}$$

$$\frac{5\,460}{63} = 85 + \frac{5}{3} \quad ; \quad 345 = 27 \times 13 - 6$$

- a. Déterminer la division euclidienne de 2 456 par 17.

- b. Donner la division euclidienne de 32 247 par 143.

- c. Déterminer le reste de la division euclidienne de 516 par 43.

- d. Déterminer la division euclidienne de 674 par 24.

- e. En déduire la division euclidienne de 5 460 par 63.

- f. Déterminer la division euclidienne de 345 par 13.

Exercice B.16

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer le PGCD des nombres 240 et 36 :

Dividende	Diviseur	Reste
240	36	...
...	...	...
...	...	...

$$240 = \dots \times 36 + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

$$\dots = \dots \times \dots + \dots$$

2. Rendre la fraction $\frac{240}{36}$ irréductible en effectuant une unique simplification. Par quel nombre avez-vous simplifié ? Justifier votre démarche.

Exercice B.17

1. Calculer le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de 496 et de 806.

2. Ecrire $\frac{496}{806}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

3. Calculer $\frac{496}{806} - \frac{3}{26}$

(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

Exercice B.18

- Déterminer la division euclidienne de 1 038 par 17.
- En étudiant le carré $(61 \times 17 + 1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de $1\,038^2$ par 17.
- En déduire une conjecture sur le reste, pour tout entier naturel n , la division euclidienne de $1\,038^n$ par 17.

Exercice B.19

L'année 2012 était une année bissextile et le 1^{er} Janvier 2012 était un dimanche.

- Combien de jour sépare le 1^{er} Janvier 2012 et le 20 Janvier 2012.
 - Donner la division euclidienne de 19 par 7.
 - Quel jour de la semaine était-on le 20 Janvier 2012.
- Déterminer le jour de la semaine du 25 Mars 2012.

Exercice B.20

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

- Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.
 - En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
- On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a; b)$ tels que $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.
 - Déterminer a lorsque $a = b$.
 - Vérifier que $(1; 1)$, $(2; 3)$ et $(5; 8)$ sont trois solutions particulières.
 - Montrer que si $(a; b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.
- Montrer que si $(x; y)$ est une solution différente de $(1; 1)$ alors $(y - x; x)$ et $(y; y + x)$ sont aussi des solutions.
 - Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.
- On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n , $n \geq 0$:
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$
Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(a_n; a_{n+1})$ est solution.
En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice B.21

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

“Etant donnés deux entiers naturels, a et b non nuls, si $\text{pgcd}(a; b) = 1$ alors $\text{pgcd}(a^2; b^2) = 1$ ”

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par :
$$S_n = \sum_{p=1}^n p^3.$$

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n , le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1} .

- Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a :
$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$
- Etude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$
 - Démontrer que :
$$\text{pgcd}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2 \cdot \text{pgcd}(k^2; (k+1)^2).$$
 - Calculer $\text{pgcd}(k; k+1)$.
 - Calculer $\text{pgcd}(S_{2k}; S_{2k+1})$.
- Etude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
 - Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
 - Calculer $\text{pgcd}(S_{2k+1}; S_{2k+2})$.
- Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n , que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice B.22

- Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
 - Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
 - En déduire les deux congruences :
$$6^{40} \equiv 1 \pmod{11} \quad ; \quad 6^{40} \equiv 1 \pmod{5}.$$
 - Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
- Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
 - Montrer que l'équation $(E) : 65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
 - Montrer que l'équation $(E') : 17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
 - Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solutions de l'équation (E') .
 - Résoudre l'équation (E') .
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que :
$$17x_0 \equiv 1 \pmod{40}$$
- Pour tout entier naturel a , démontrer que :
$$\text{Si } \begin{cases} a^{17} \equiv b \pmod{55} \\ a^{40} \equiv 1 \pmod{55} \end{cases} \text{ alors } b^{33} \equiv a \pmod{55}$$

Exercice B.23

Partie I

Soit x un nombre réel.

- Montrer que : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
- En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers : $A = n^2 - 2n + 2$; $B = n^2 + 2n + 2$

et d leur PGCD.

- Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
- Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.
- Montrer que, tout diviseur commun de A et de B , divise $4n$.
- Dans cette question, on suppose que n est impair.
 - Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
 - Montrer que d divise n .
 - En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

- a. Montrer que 4 ne divise par $n^2 - 2n + 2$.
- b. Montrer que d est de la forme $d = 2 \cdot p$, où p est impair.
- c. Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.).

Exercice B.24

Soit p un entier premier supérieur ou égal à 5.

1. Justifier que l'entier p vérifie l'une des deux conditions suivantes :
$$p \equiv 1 \pmod{6} \quad ; \quad p \equiv 5 \pmod{6}$$
2. Justifier que l'entier $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice B.25

On cherche à savoir pour quelle(s) valeur(s) de l'entier naturel n , $\sin(2^n)$ est le plus grand possible, 2^n étant la mesure d'un angle en degrés.

1. Décomposer 360 en facteurs premiers.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 3$: $2^{n+12} \equiv 2^n \pmod{360}$
3. En déduire qu'il suffit d'observer les valeurs de $\sin(2^n)$ pour $0 \leq n \leq 14$.
4. Quelle est la valeur maximale de $\sin(2^n)$?

Exercice B.26

On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre : $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}

1. Montrer que d_n divise 2^n .
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p . Justifier.

Exercice B.27

1. Déterminer le PGCD de deux entiers naturels pairs consécutifs.
2. Déterminer le PGCD de deux entiers naturels impairs consécutifs.

Exercice B.28

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

$$\text{pgcd}(a; b) = d \quad ; \quad \text{pgcd}(a+b; ab) = d'$$

Montrer que d est un diviseur de d' .

Exercice B.29

Déterminer l'ensemble des couples $(m; n)$ d'entiers naturels vérifiant le système :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \text{pgcd}(m; n) = 8 \end{cases}$$

Exercice B.30

1. a. Déterminer la valeur de a et b deux entiers relatifs tels que, pour tout entier relatif n , on a :

$$\frac{4n+1}{n+1} = a + \frac{b}{n+1}$$

- b. En déduire les valeurs de n pour laquelle $\frac{4n+1}{n+1}$ est un entier.

2. Déterminer, si elles existent, les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ tels que les fractions suivantes aient des valeurs entières :

$$\text{a. } \frac{6n+9}{2n+1} \qquad \text{b. } \frac{9-6n}{3n-4}$$

Exercice B.31

1. Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre :

$$A_n = \frac{2n^2 - n - 11}{n - 1}$$

- a. Déterminer la valeur des entiers relatifs a, b, c vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel n distinct de 1 :

$$A_n = a \cdot n + b + \frac{c}{n - 1}$$

- b. En déduire les valeurs de n telles que le nombre A_n est un nombre entier.

2. On considère pour tout entier relatif, le nombre B_n défini par :

$$B_n = \frac{2n^2 - 3n - 15}{2n + 3}$$

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles B_n est un entier relatif.

Exercice B.32

1. On considère le nombre A défini par :

$$A = m \times (4 \cdot n + 1) \quad \text{où } m, n \in \mathbb{N}.$$

On cherche à déterminer les valeurs de m et n réalisant l'égalité $A = 45$.

- a. En étudiant la relation $45 = m \times (4 \cdot n + 1)$, donner un ensemble de valeurs possibles de m .

- b. En déduire l'ensemble des couples $(m; n)$ réalisant $A = 45$.

2. On considère le nombre B définie par :

$$B = (2 \cdot m + 3) \cdot (2 \cdot n) \quad \text{où } m, n \in \mathbb{N}$$

Déterminer l'ensemble des couples $(m; n)$ d'entiers vérifiant la relation $B = 70$.

Exercice B.33

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3.

- b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier n naturel, le reste de 10^n par la division euclidienne par 3 vaut 1.

2. Justifier que le nombre $4 \times 10^n - 1$ est, pour tout entier naturel n , divisible par 3.

Exercice B.34

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme :

$$N = \overline{a00b}$$

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$

2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice B.35

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que :

- a. A soit divisible par six ;
 - b. A soit divisible par cinq.
- En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2. On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois ?

Exercice B.36

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 \quad ; \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad ; \quad c_n = 2 \times 10^n + 1$$

1. Calculer $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .
2. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ?
Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
3. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :
 $b_n \times c_n = a_{2n}$.
En déduire une décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 .
5. Montrer que $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(c_n; 2)$.
En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19

23 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59

61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

Exercice B.37

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
 - a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation :
 $14u + 39v = 1129$
 - b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation :
 $14x + 39y = 1$
Vérifier que le couple $(-25; 9)$ est solution de cette équation.
 - c. En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de l'équation :
 $14u + 39v = 1129$
Donner la solution générale de cette équation, c'est à dire l'ensemble des couples $(u; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
 - d. Déterminer, parmi les couples $(u; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
2.
 - a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
 - b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
 $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
 - c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Exercice B.38

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$
 - a. Vérifier que 239 est solution de ce système.
 - b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme :
 $N = 1 + 17x = 5 + 13y$
où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
 - c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
 - e. Démontrer l'équivalence entre :
 $N \equiv 18 \pmod{221}$ et $\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
 - a. Existe-t-il un entier naturel k tel que :
 $10^k \equiv 1 \pmod{17}$?
 - b. Existe-t-il un entier naturel ℓ tel que :
 $10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$?

Exercice B.39

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1; 46]$.

1. On considère l'équation : $(E) : 23 \cdot x + 47 \cdot y = 1$
où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E) .
 - b. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ solutions de (E) .
 - c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que :
 $23 \cdot x \equiv 1 \pmod{47}$
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
 - a. Montrer que si $a \cdot b \equiv 0 \pmod{47}$ alors :
 $a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$
 - b. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors :
 $a \equiv 1 \pmod{47}$; $a \equiv -1 \pmod{47}$
3.
 - a. Montrer que pour tout entier p de A , il existe un entier relatif q tel que :
 $p \times q \equiv 1 \pmod{47}$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A , il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que :
 $p \times inv(p) \equiv 1 \pmod{47}$

Par exemple :

 - $inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \pmod{47}$
 - $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \pmod{47}$
 - $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1 \pmod{47}$
 - b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient :
 $p = inv(p)$

- c. Montrer que : $46! \equiv -1 \pmod{47}$

Exercice B.40

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

- On considère l'équation notée (E) :
 $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Déterminer un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tels que :
 $3\cdot u + 7\cdot v = 1$
En déduire une solution particulière $(x_0;y_0)$ de l'équation (E) .
 - Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x;y)$ solutions de (E) .
- On considère l'équation notée (G) :
 $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Montrer que : $100 \equiv 2 \pmod{7}$.
Démontrer que si $(x;y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.
 - Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

- c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice B.41

Déterminer l'ensemble des couples $(m;n)$ d'entiers naturels tels que :

$$\text{pgcd}(m;n)=6 \qquad ; \qquad m+n=72$$

Exercice B.42

On considère deux nombres entiers naturels x et y .

Montrer que si x et y sont premiers entre eux alors il en est de même pour les entiers $2x+y$ et $5x+2y$.

Exercice B.43

Soit p et q deux entiers naturel non nuls.

- En supposant que $a=9p+4q$ et $b=2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même $PGCD$.
- Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.

Exercice B.44

Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.

- Démontrer que les nombres $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.
- Démonter que le $PGCD$ des nombres $2k-1$ et $9k+4$ est nécessairement 1 ou 17.
 - Etablir l'affirmation suivante :
 $\text{pgcd}\left(2k-1;9k+4\right)=17 \iff k\equiv 9 \pmod{17}$

Exercice B.45

- On note d le pgcd des entiers $9n+4$ et $2n-1$.
Justifier que d divise 17.
- Etablir l'équivalence suivante :
 $n\equiv 9 \pmod{17} \iff \text{pgcd}\left(9n+4;2n-1\right)=17$

Exercice B.46

- En supposant que $a=9p+4q$ et $b=2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même PGCD.
 - Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.
- Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p+4$ et $2p-1$ en fonction des valeurs de p .

Exercice B.47

Simplifier l'écriture des nombres suivants sous forme de produit de facteurs premiers :

- a. $18\times 15^2\times 9\times 82$ b. $9^2\times 15^{-2}\times 4^4$ c. $\frac{5\times 3^4\times 12^2}{21^2\times 15^3}$
- d. $\frac{5^2\times 3^2}{5^5\cdot \left(3^4+3^4\right)}$ e. $\frac{2^2\times 5^{-4}}{2^{21}+2^{22}}$

Exercice B.48

Préciser si les nombres suivants sont premiers ou non :

- a. 37 b. 127 c. 541 d. $2\times 3\times 5\times 7+1$

Exercice B.49

On considère les deux nombres suivants :

$$A=72 \quad ; \quad B=135$$

- Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres A et B .
- A l'aide d'un arbre de choix, déterminer l'ensemble des diviseurs de A et l'ensemble des diviseurs de B .
 - Donner l'ensemble des diviseurs commun à A et à B .

Exercice B.50

On donne la division euclidienne de 195695 par 3 :

$$195\,695=65\,231\times 3+2$$

- Justifier que le reste de la division euclidienne de $(195\,695\times 2)$ par 3 est 1.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de $(195\,695\times 3)$ par 3.
- On note r_n le reste de la division euclidienne de $(195\,695\times n)$ par 3. Compléter de tête le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n							

Exercice B.51

Etablir que, quelque soit la valeur de n , les deux nombres $n+3$ et $-2n^2-n+14$ sont premiers entre eux.

Exercice B.52

Pour chaque équation, déterminer un couple de solution d'entiers $(u;v)$:

- a. $354\cdot u+49\cdot v=1$ b. $34\cdot u+57\cdot v=1$

Exercice B.53

Soit n une entier naturel, on pose :

$$a=2n+8 \quad ; \quad b=3n+15$$

On note d le PGCD de a et de b .

- Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, d divise 6.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers naturels n pour lesquels $d=6$. C'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est défini par :

$$\mathcal{S} = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \text{pgcd}(2n+8; 3n+15) = 6 \right\}$$

- Montrer que si $n \in \mathcal{S}$ alors il existe un entier k tel que $n = -4 + 3 \cdot k$
- En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exercice B.54

1. Calculer le $PGCD$ de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5 \cdot u_{n+1} - 4 \cdot u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 de la suite u .
- Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 \cdot u_n + 1$
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.
 - En déduire, pour tout entier naturel n , le $PGCD$ de u_n et u_{n+1} .
- Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$
 - Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - Déterminer, pour tout entier naturel n , le $PGCD$ de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

Exercice B.55

- Déterminer une valeur de l'entier $a \in [10; 20]$ pour laquelle l'égalité est vraie :

a. $25 \equiv a \pmod{4}$	b. $37 \equiv a \pmod{10}$
c. $52 \equiv a \pmod{7}$	d. $5 \equiv a \pmod{14}$
e. $1 \equiv a \pmod{9}$	f. $13 \equiv a \pmod{5}$
- Déterminer une valeur de n pour laquelle l'égalité est vraie :

a. $21 \equiv 1 \pmod{n}$	b. $14 \equiv 4 \pmod{n}$
c. $9 \equiv 14 \pmod{n}$	d. $10 \equiv 25 \pmod{n}$

Exercice B.56

Le numéro I.N.S.E.E. est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :

- Le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme, 2 s'il s'agit d'une femme ;
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre civil ;
- les deux derniers chiffres désignent la clé K , calculée de la manière suivante :
 - Soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche,
 - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97,
 - alors $K = 97 - r$

Les 13 premiers chiffres (*sans clé*) du nombre *I.N.S.E.E.* de Sophie sont 2850786183048. On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

- Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.
- Déterminer les deux entiers a et b tels que : $A = a \times 10^6 + b$ avec $0 \leq b < 10^6$.
 - En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97 ; montrer que : $10^6 \equiv 27 \pmod{97}$
 - En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.
- Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E. de Sophie.
- Sophie, à qui l'on demande les **treize** premiers chiffres de son numéro I.N.S.E.E., inverse les deux derniers chiffres et répond 2850786183084 à la place de 2850786183048.
On note B la réponse de Sophie.
 - Calculer la différence $B - A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.
 - L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

Exercice B.57

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7. Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

- Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3
En déduire que n est divisible par 3.
- En remarquant que p est impaire, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4 \cdot k \cdot (k+1)$, puis que n est divisible par 16.
- En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .
- Soient a , b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .
 - Déduire de ce qui précède que 240 divise n .
- Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice B.58

On considère le système de congruences :

$$(S) \quad \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \quad \text{où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

- Montrer que 11 est solution de (S) .
- Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
- Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15 \cdot k$, où k désigne un entier relatif.

Exercice B.59

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}^{10}$

Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible 7.

Exercice B.60

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $abba$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119.

1. Montrer que :
“ n est divisible par 3 équivaut à $a+b$ est divisible par 3”
2. Montrer que :
“ n est divisible par 7 équivaut à b est divisible par 7”

Exercice B.61

Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité :

$$y \cdot (y - x) = x \cdot (2 - x)$$

On suppose que l'entier x est un entier premier.

1. Démontrer que le nombre x divise y .
2. On pose $y = k \cdot x$ avec $k \in \mathbb{Z}$:
 - a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
 - b. En déduire les valeurs possibles de k .

Exercice B.62

On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : 17x - 15y = 3$$

où l'ensemble de résolution est l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs.

Démontrer que, pour tout couple $(x; y)$ solution de (E) , x est un multiple de 3.

Exercice B.63

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul tel que a et p sont premiers entre eux :

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n non-nul, les entiers a^n et p sont premiers entre eux.
2. Etablir l'existence d'un entier naturel n non-nul tel que : $a^n \equiv 1 \pmod{p}$

Exercice B.64

On considère les nombres :

$$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$$

1.
 - a. Montrer que 1 000 est divisible par 8.
 - b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
 - c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A \cdot B$
3.
 - a. Montrer que B^2 est divisible par 8.
 - b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
 - c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Exercice B.65

1.
 - a. Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.
 - b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.
2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.
 - a. Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.
 - b. En déduire que (n^3+1) est divisible par 7.
3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors (n^3-1) est divisible par 7.
4. On considère le nombre : $A = 1999^3 + 2007^3$.
Sans calculer A , montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

Exercice B.66

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1 \pmod{4}$
3. Etudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4, la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

Exercice B.67

Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
2. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si, et seulement si, 7 divise x et 7 divise y .

Exercice B.68

1. Montrer que pour tout entier naturel n , 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$.
2. Soit p un entier naturel. Montrer que parmi les entiers $p, p+10, p+20$, un et un seul d'entre eux est divisible par 3.

Exercice B.69

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que :
$$\text{Si } a \cdot b \equiv 0 \pmod{47} \text{ alors } \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{47} \\ \text{ou} \\ b \equiv 0 \pmod{47} \end{cases}.$$
2. En déduire que :
$$\text{Si } a^2 \equiv 1 \pmod{47} \text{ alors } \begin{cases} a \equiv 1 \pmod{47} \\ \text{ou} \\ a \equiv -1 \pmod{47} \end{cases}.$$

Exercice B.70

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

$$\text{pgcd}(a+b; ab) = p$$

où p est un nombre premier.

1. Démontrer que p divise a^2 .
(On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$)
2. En déduire que p divise a .
On constate donc, de même que p divise b .
3. Démontrer que : $\text{pgcd}(a; b) = p$.

Exercice B.71

Dans l'exercice, n représente un entier naturel.

1. Etudier le reste de la division euclidienne de 2^n et 3^n par la division euclidienne par 4 en fonction des valeurs de n .
2. En déduire, en fonction de n , le reste, par la division euclidienne par 4, de la somme :
$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$$

Exercice B.72

- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence :
 $6^n \equiv 0 \pmod{8}$
- Pour tout entier naturel n , déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8 :
 $A = 6^n + 9^n$

Exercice B.73

- Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
- Montrer que pour tout entier relatif, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
- Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

Exercice B.74

- Déterminer un couple trivial $(x; y)$ d'entiers solution de l'équation :
 $(E) : -7 \cdot x + 25 \cdot y = 1$
 - En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation.
- Déterminer un couple trivial $(x; y)$ d'entiers solution de l'équation :
 $(F) : 135 \cdot x + 18 \cdot y = 9$
 - En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation.

Exercice B.75

On considère l'équation $(E) : 7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

- Donner une solution particulière de l'équation (E) .
- Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E) .

Exercice B.76

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

- On considère l'équation notée $(E) :$
 $3x + 7y = 10^{2n}$ x et y sont des entiers relatifs.
 - Déterminer un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que :
 $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de l'équation (E) .
 - Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de (E) .
- On considère l'équation notée $(G) :$
 $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - Montrer que : $100 \equiv 2 \pmod{7}$.
Démontrer que si $(x; y)$ est solution de (G) alors :
 $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$
 - Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

- Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice B.77

- Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

- En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.
- Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

- Etablir que le nombre $(12^{39} - 3)$ est divisible par 5.

Exercice B.78

- Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.
- Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
- Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

Exercice B.79

Soit n un entier naturel.

- Trouver suivant les valeurs de n , les restes de la division de 5^n par 13.
- En déduire que $1981^{1981} - 5$ est divisible par 13.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice B.80

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

- Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
 - Démontrer que, pour tout n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
 - A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
 - De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
- Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - Montrer que si U_n est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
 - Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisibles par 7.

Exercice B.81

On se propose de déterminer les couples $(n; m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad (F)$

- On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - a. Montrer que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors : $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
 - b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - c. En déduire que si le couple $(n; m)$ vérifie la relation (F) alors : $7^n \equiv 1 \pmod{5}$
 - d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples $(n; m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est à dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) .

Exercice B.82

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (*on pourra utiliser un raisonnement par récurrence*). En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier : $Q_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
 - a. Si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
 - b. Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est divisible par 7.
 - c. Etudier le cas où $p=3n+2$
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire : $a = \overline{1001001000}$; $b = \overline{1000100010000}$
Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p . Sont-ils divisibles par 7 ?

Exercice B.83

- Un entier naturel N s'écrit $\overline{cab c}$ dans le système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire : $N = c \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c$
où a, b, c sont des entiers tels que : $0 < a < 5$; $0 < b < 5$; $0 < c < 5$
- Ce même nombre N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.
1. Montrer que $N = 65a + 8b$ et en déduire que : $40a = 126c - 3b$.
 2. a. Justifier que : $40a \equiv 0 \pmod{3}$.
En déduire la valeur de a .
b. Montrer que : $b \equiv 0 \pmod{2}$.
Déterminer les valeurs de b et c .
c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

Exercice B.84

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a le reste de la division euclidienne de $8n$ par 5 ; compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
a					
- b. Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation suivante : $8n \equiv 4 \pmod{5}$
2. En utilisant une démarche équivalente, résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{Z}$: $5n \equiv 2 \pmod{6}$
3. Dans $\mathbb{Z}$, justifier que l'équation $6n \equiv 5 \pmod{4}$ a l'ensemble vide comme ensemble de solution.

Exercice B.85

- Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels vérifiant l'égalité : $a^2 - b^2 = 21$

Exercice B.86

1. Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division par 7 du nombre : $A = n^2 - n + 1$
2. En déduire les entiers n tels que le nombre A soit divisible par 7.
3. Déterminer le reste de la division par 7 du nombre : $B = 2\,753^2 - 2\,753 + 1$

C. Fonctions numériques:

Exercice C.1

- Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions ci-dessous :
- a. $f(x) = -5x^3 + 2x - 2$
 - b. $g(x) = \sqrt{x} \cdot (5x + 1)$
 - c. $h(x) = \frac{3x - 1}{2 - x}$
 - d. $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{5 - 2x}$

Exercice C.2

- Déterminer l'expression de la fonction dérivée à chacune des fonctions suivantes :
- a. $f(x) = (5 \cdot x + 2) \cdot (3 - x)$
 - b. $g(x) = \frac{3x + 2}{2 - x}$
 - c. $h(x) = (-2x^2 + 3x + 2) \cdot \sqrt{x}$
 - d. $j(x) = \frac{2 \cdot x - 2}{\sqrt{x}}$

Exercice C.3

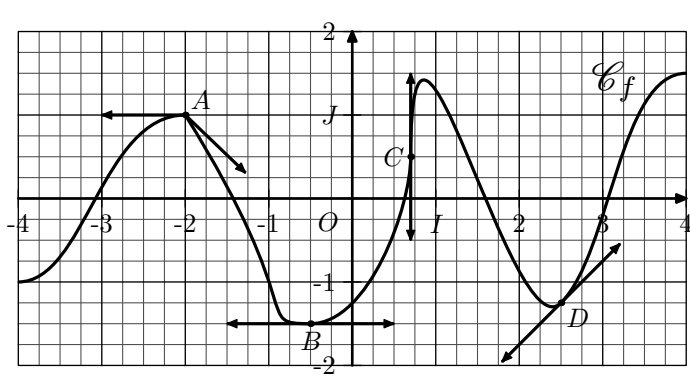
- On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x + 2\right) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1} + 1$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. a. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre réel h : $\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{(h+3) \cdot \sqrt{h^2}}{2 \cdot h}$
b. En déduire la valeur des deux limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$
3. Que pouvez-vous dire sur l'aspect de la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 ? (*tracer la courbe à l'aide d'une calculatrice*)

Exercice C.4

- Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f . Voici sa représentation :



- Justifier que la fonction f n'est pas dérivable pour l'abscisse du point C .
- Graphiquement, déterminer les deux limites suivantes :
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
 - La fonction f est-elle dérivable en -2 ?
- Déterminer, graphiquement, la valeur des nombres dérivées de la fonction f aux abscisses des points B et D .

Exercice C.5

On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \sqrt{-2x^2 - x + 6}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f .

Exercice C.6

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonction suivantes :

- $f(x) = (3 \cdot x + 5)^5$
- $g(x) = \frac{1}{3 \cdot x^4 + 11}$
- $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
- $j(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

Exercice C.7

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}$$
- On considère la fonction g définie par la relation :
$$g(x) = f(2x-1)$$
 - Donner l'expression simplifiée du nombre $g(x)$ en fonction de x .
 - Donner l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g .

Exercice C.8

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ par la relation par la relation suivante :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en -1

Exercice C.9

- Soit f une fonction définie en 0 telle que :
$$f(x) = a \cdot x + b + x \cdot \varepsilon(x) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Montrer que la fonction f est dérivable en 0.
- Soit g une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :
$$g(x) = 3 - 2x + x^2$$
 - Justifier, sans effectuer aucun calcul, que la fonction g est dérivable en 0.
 - Donner la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 0.
- Soit h une fonction définie en 0 dont l'image de x est définie par :
$$h(x) = \frac{-3x^3 + 3x^2 + x - 2}{x + 1}$$
 - Etablir l'égalité suivante : $h(x) = 3x - 2 - \frac{3 \cdot x^3}{x + 1}$
 - En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 0.

Exercice C.10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3 + 3 \cdot x$$

- Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction f ; on notera α ce nombre.
- On pose pour valeur $a_0=0$ et $b_0=2$. On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et convergentes vers α .

- Compléter le tableau ci-dessous :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$						
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

- Avec quelle précision obtient-on la valeur de α à l'aide du tableau.

Exercice C.11

- On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en 0.
- On considère la fonction g définie par la relation sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = E(x) \cdot \sin(\pi \cdot x)$$
 - Simplifier l'écriture de la fonction g sur chacun des intervalles suivants :
$$[-1; 0[\quad ; \quad [0; 1[\quad ; \quad [1; 2[$$
 - Justifier que la fonction g est continue en 0 et en 1.
 - Emettre une conjecture sur l'ensemble de continuité de la fonction f ?
 - Tracer la courbe représentative de cette fonction sur votre

calculatrice.

Exercice C.12

Etude de la cissoïde de Dioclès.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Soit Γ_1 , la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe Γ_1 , au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. Tracer la courbe Γ_1 et la droite T .
3. Sur le même graphique, tracer Γ_2 courbe symétrique de Γ_1 dans la symétrie orthogonale d'axe Ox .
4. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Montrer que Γ a pour équation cartésienne :
$$x \cdot (x^2 + y^2) - y^2 = 0$$

Γ est appelé cissoïde de Dioclès.

Partie B - Interprétation géométrique de (E)

I est le point de coordonnées $(1; 0)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[OI]$ et Δ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point I .

Soit D la droite passant par O de coefficient directeur t , $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées de M tel que $\mathcal{C} \cap D = \{O; M\}$. Déterminer les coordonnées de M' tel que $\Gamma \cap D = \{O; M'\}$. Déterminer les coordonnées de N tel que $\Delta \cap D = \{N\}$
2. Montrer que : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.
3. Déterminer l'intersection de Γ et de $\mathcal{C}$.

Exercice C.13

Etudier la fonction f définie par :

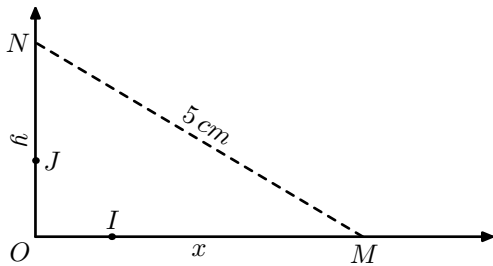
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Elle a une asymptote oblique, une asymptote horizontale et une tangente horizontale super pour la trace

Exercice C.14

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dont l'unité graphique est le centimètre.

On considère un segment $[MN]$ dont les extrémités M et N reposent sur les parties positives respectivement de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.



On considère les deux distances suivantes :

$$a = OM \quad ; \quad b = ON$$

1. Déterminer l'expression de b en fonction de la valeur de a .

On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OMN .

2. Démontrer que l'aire de OMN s'exprime en fonction de x par :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2}$$

3. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{25 - 2 \cdot x^2}{2 \cdot \sqrt{25 - x^2}}$$

4. a. Etablir le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$.
b. Etablir le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$.

5. En déduire la position du segment $[MN]$ pour laquelle le triangle OMN possède une aire maximale.

Exercice C.15

1. Les fonctions sinus et cosinus sont toutes deux majorés par 1 et minoré par -1.
Traduire cette propriété par une inégalité.

2. Etablir les encadrements suivants :

a. $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$

b. $-5 \leq 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x \leq 5$

c. $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos x} \leq 1$

3. A l'aide de votre calculatrice, tracer les trois fonctions associées à ces encadrements, puis observez si vous pouvez faire une conjecture sur des bornes plus précises.

Exercice C.16

Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

b. $g: x \mapsto (2x+1)\sqrt{3x-1}$

Exercice C.17

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto 5 \cdot (x^2 + x + 1)^4$$

2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie par :

$$g: x \mapsto \frac{2}{5} x^2 \cdot \sqrt{3-2x}$$

Ecrire cette fonction dérivée de la fonction g sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est $\sqrt{3-2x}$.

Exercice C.18

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = x \cdot \sqrt{3x-1}$$

Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f (On donnera l'expression de f' sous la forme d'un quotient simplifié).

Exercice C.19

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée

a. $f: x \mapsto (4x-2)^7$ b. $g: x \mapsto \frac{1}{5-3x}$

c. $h: x \mapsto \sqrt{3x-1}$ d. $j: x \mapsto (3-2x)^3 \cdot \sqrt{4x+1}$

Donner l'expression de la fonction j sous la forme d'un quotient où :

- Le dénominateur est $\sqrt{4x+1}$
- $(3-2x)^2$ est en facteur au numérateur.

Exercice C.20

Déterminer l'expression, sous une forme simplifiée, des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 2}$

b. $g(x) = (\sqrt{x+1})^3$

c. $h(x) = (3x^2 - 2x + 1)\sqrt{x}$

d. $j(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{3 - x}$

Exercice C.21

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$$

- Justifier que la fonction f admet pour ensemble de définition la partie I de $\mathbb{R}$ définie par :

$$I = \left] -\infty ; -\frac{5}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{3} ; +\infty \right[.$$

- Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I .

Exercice C.22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = (5x^2 + 3x + 2)^5$$

- Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice C.23

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\left[\frac{5}{3} ; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = 2(3 - 2x)^5 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{3x - 5}$$

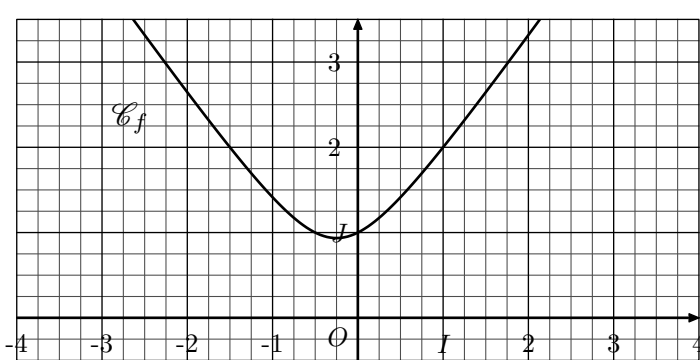
- Déterminer l'expression des fonctions dérivées f' et g' associées aux fonctions f et g .
- Déterminer le signe des fonctions f' et g' sur leur ensemble de dérivation.
 - Dresser le tableau de variation de ces deux fonctions.

Exercice C.24

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer le tableau de variation de la fonction f .
- Dans un repère $(O; I; J)$, on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f :



- Déterminer l'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- Tracer la droite (d) dans le repère ci-dessus.

Exercice C.25

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x + 3}}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
- Montrer que le nombre dérivée de f en x s'écrit :

$$f'(x) = \frac{(x + 1)(3x + 11)}{2(x + 3)\sqrt{x + 3}}$$
- Dresser le tableau de signe de la fonction f' .
- En déduire le tableau de variation de la fonction f .
- Donner le minimum de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice C.26

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f: x \mapsto (x + 5)\sqrt{1 - 2x}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f .
- Dresser le tableau de signe de f' .
- En déduire le tableau de variation de la fonction f .
- Justifier que f admet un extrémum global en $-\frac{4}{3}$.

Exercice C.27

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$$

On note (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

- Déterminer l'équation réduite de la droite (T) .
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite (T) .

Soit g la fonction dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$g(x) = \sqrt{2 - 3 \cdot x}$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g .

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse -2 .

Exercice C.28

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^4 - 81}{h}$

b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6 \cdot h + 1} - 1}{h}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^8 - 1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}$

Exercice C.29

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 & \text{pour tout } x \in \left] -\infty ; -1 \right] \\ f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} & \text{pour tout } x \in \left] -1 ; +\infty \right[\end{cases}$$

- Effectuer le tracé de la fonction f à l'aide de votre calculatrice.
 - Faire une conjecture sur la continuité et sur la dérivabilité de la fonction f .

- Justifier que la fonction f est continue en -1 .
- Justifier que la fonction f est dérivable en -1 .

Exercice C.30

A - Etude d'une fonction :

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- Etudier les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$
 - Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1 .
- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
 - Dresser le tableau de variation de la fonction f .

B - Prolongement par continuité :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\\ g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1 & \text{pour } x \in [-1; 1] \end{cases}$$

- Justifier que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction g . Justifier vos affirmations.
- Dresser le tableau de variations de la fonction g .
- Justifier l'existence d'un unique nombre α appartenant à $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
 $g(\alpha) = 2 \quad ; \quad 2 < \alpha < 2,1$

Exercice C.31

On considère une fonction f qui admet le tableau de variation suivant :

x	-5	1	5	10^3
Variation de f	4		-1	5
		-6		-13

- Justifier que la fonction f s'annule deux fois sur son ensemble de définition.
- Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice C.32

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ admettant le tableau de variation suivant :

x	-4	2	4
Variation de f	3		-1
		$-\frac{9}{2}$	

- Justifier que la fonction f s'annule une unique fois sur son ensemble de définition.
- Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice C.33

- On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par :
 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
 - Etudier les variations de P .
 - Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule, α , et que α appartient à l'intervalle $]1,6; 1,7[$
- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1 . On considère la fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à une repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm).

- Etudier les variations de f (on utilisera pour cela les résultats du 1.).
- Ecrire une équation de la droite (D) tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) dans l'intervalle $] -1; 1[$.
- Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.
Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

Exercice C.34

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - \sqrt{1 + 2 \cdot x^2}$$

- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = 3 \cdot x \cdot \sqrt{2x^2 + 1} - 2$
 - Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
De plus, justifier que : $0,5 < \alpha < 0,6$.
 - Dresser le tableau de signe de la fonction g .
- Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
 - Dresser le tableau de signe de f' .
 - En déduire le tableau de variation de la fonction f . (on utilisera des valeurs approchées obtenues à l'aide de la calculatrice).

Exercice C.35

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définies par :

$$f: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad g: x \mapsto 2x^3 + x^2 - 1$$

- Montrer que pour tout $x \neq 0$ les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
- Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α avec $0 < \alpha < 1$. (On ne cherchera pas à calculer α)
- Dresser le tableau des variations de la fonction f .

On désigne par $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de la fonction f dans une repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse -1 et par J le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $+1$.

4. a. Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à $(\mathcal{C})$.
b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à $(\mathcal{C})$.
5. Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) .
6. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe $(\mathcal{C})$.
(On prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur de α)

Exercice C.36

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est définie par l'expression :

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - 2 \cdot x$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f admet un maximum global et d'obtenir une valeur approchée.

1. a. Montrer que la dérivée seconde de la fonction f admet pour expression :
$$f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

b. Etablir les deux limites suivantes :
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -5 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$$

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f' .
2. a. Justifier que la fonction f' s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.
b. On note α l'unique solution de l'équation : $f'(x) = 0$. Justifier brièvement que le nombre α appartient à l'intervalle $[0,8 ; 0,9]$.
3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction f' .
b. Justifier que la fonction f admet un minimum global qui est atteint pour $x = \alpha$.

D. Fonction logarithme népérien:

Exercice D.1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

1. On considère la fonction u définie par :
$$u(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Par une disjonction de cas, établir que la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Etablir que la fonction f est la fonction nulle.

Exercice D.2

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| a. $\ln(5x+1) = \ln(x-1)$ | c. $2 \cdot \ln(3-x) = \ln(2)$ |
| d. $\ln(3x+1) = 5$ | e. $3 \cdot e^{2x-1} = 2$ |
| f. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ | g. $e^{2x} + 4 \cdot e^x - 1 = 0$ |

Exercice D.3

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les deux systèmes d'équations suivants :

- | | |
|---|--|
| a. $\begin{cases} 2 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln y = -11 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases}$ | b. $\begin{cases} \ln(2 \cdot x + y) = 0 \\ \ln(x) + \ln(y) = 1 \end{cases}$ |
|---|--|

Exercice D.4

Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces inéquations puis les résoudre :

- | | |
|---|--|
| a. $\ln(x) > 9$ | b. $\ln(x) \leq \frac{1}{2}$ |
| c. $(\ln x)^2 - 3 \cdot \ln x + 1 \geq 0$ | d. $-(\ln x)^2 + 4 \cdot \ln x + 1 \geq 0$ |
| e. $e^{3 \cdot x} < 0$ | f. $e^{2 \cdot x} - e^x - 6 > 0$ |

Exercice D.5

On considère l'inéquation :
(E): $\ln(x+1) \leq \ln(2-x)$

1. Donner la plus grande partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle les deux expressions $\ln(x+1)$ et $\ln(2-x)$ sont définies.
2. Résoudre l'inéquation (E).

Exercice D.6

1. Résoudre dans $] -1 ; +\infty[$, l'inéquation :
(E): $\ln(x+1) \geq \ln(x^2+1)$
2. Résoudre dans $] -3 ; 2[$, l'inéquation :
(F): $\ln(4-2x) < \ln(x+3)$

Exercice D.7

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- | | |
|--|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \ln x + x$ | b. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(x+3) - 3 \cdot x$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$ | d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1)$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2 \cdot \ln x + 1}$ | f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x)$ |

Exercice D.8

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ | b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ | d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \cdot (x^2 + 2)$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\ln x}$ | f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ |

Exercice D.9

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Etudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$
2. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $\mathcal{C}$ passant par O . Préciser une équation de cette tangente.

Exercice D.10

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| a. $f(x) = x \cdot \ln x$ | b. $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$ |
| c. $h(x) = \ln(\sqrt{1-x})$ | d. $j(x) = \ln(e^x - 1)$ |

Exercice D.11

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f .
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x) = -\frac{e^x \cdot (e^{2x} - 4 \cdot e^x + 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}$$
3. a. Etudier le signe du polynôme $x^2 - 4x + 1$.
b. En déduire que la fonction f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$

On précisera les valeurs de a et de b .
4. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction f . On y précisera les valeurs approchées de $f(a)$ et de $f(b)$.

Exercice D.12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -3 - \ln x + 2 \cdot (\ln x)^2$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. a. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation : $f(x) = 0$.
(On pourra poser : $\ln x = X$).
b. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation : $f(x) > 0$.
2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b. Calculer $f'(x)$.
c. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.
4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{T})$. Pour cela, on considère la fonction φ , définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$\varphi(x) = f(x) - \left(4 \cdot e^{-\frac{5}{4}} \cdot x - \frac{41}{8}\right)$$

a. Montrer que : $\varphi'(x) = \frac{4 \cdot \ln x - 1}{x} - 4 \cdot e^{-\frac{5}{4}}$
puis calculer $\varphi''(x)$.
b. Etudier le sens de variation de φ' sur $]0; +\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, on a : $\varphi'(x) \leq 0$.
c. Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, déterminer le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{T})$.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{T})$. (unité graphique : 2 cm)

Exercice D.13

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + x \cdot \ln(x + 2)$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction f

1. Etude des variations de la dérivée f' .
a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$.
b. Etudier les variations de f' sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.
c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
2. Etude du signe de $f'(x)$.
a. Montrer que sur l'intervalle $] -2; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6; -0,5]$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
3. Etude des variations de f
a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] -2; +\infty[$
b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
c. Dresser le tableau de variation de f .

Partie B

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$, on appelle T_{x_0}

la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x_0 .

On note, pour x appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$:

$$d(x) = f(x) - [f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)]$$

1. Etude des variations de d .
a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] -2; +\infty[$:
$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

b. En utilisant la croissance de la fonction f' , donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x . En déduire les variations de d sur l'intervalle $] -2; +\infty[$.
2. Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de T_{x_0} .

Exercice D.14

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$$

1. Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :
$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout x de $[1; +\infty[$:
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$.

Exercice D.15

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \cdot \ln x$$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice D.16

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm .

I- Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

1. Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

II- Etude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f .
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
4. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$. Déterminer le point A de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
5. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice D.17

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1)$$

1. En détaillant les calculs effectués, montrer que :
$$g'(x) = 2x - 2x \ln(x^2 + 1)$$
2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α , dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}]$, tel que $g(\alpha)=0$; donner l'approximation décimale 10^{-2} près par défaut de α .
4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{lorsque } x \neq 0$$

Sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$, dans le plan rapporté à un repère d'origine O est donnée ci-dessous :

1. a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.
En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
b. Vérifier que, pour x strictement positif :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2 \cdot (1+x^2)}$$
Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour $x \geq 1$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$
b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice D.18

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + 2 \cdot \ln x}{x^2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathcal{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f .
2. Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose :
$$g(x) = 1 - x + 2 \cdot \ln x$$
 - a. Etudier les variations de la fonction g .
 - b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0; 2[$ et $]2; 4[$. Soit α la solution appartenant $]2; 4[$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
3. a. Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en deux points.
b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :
$$0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$$

Partie B

On considère, pour tout entier n supérieure ou égal à 1, la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x^{2n}}$$

1. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n .
2. Résoudre l'équation $f'_n(x)=0$. Soit x_n la solution de cette équation.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n) .

Exercice D.19

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définies par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

Exercice D.20

On considère la suite v de terme général (v_n) défini par :

$$v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On définit la somme S_n pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = -\ln(n+1)$$

Exercice D.21

1. On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

a. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.

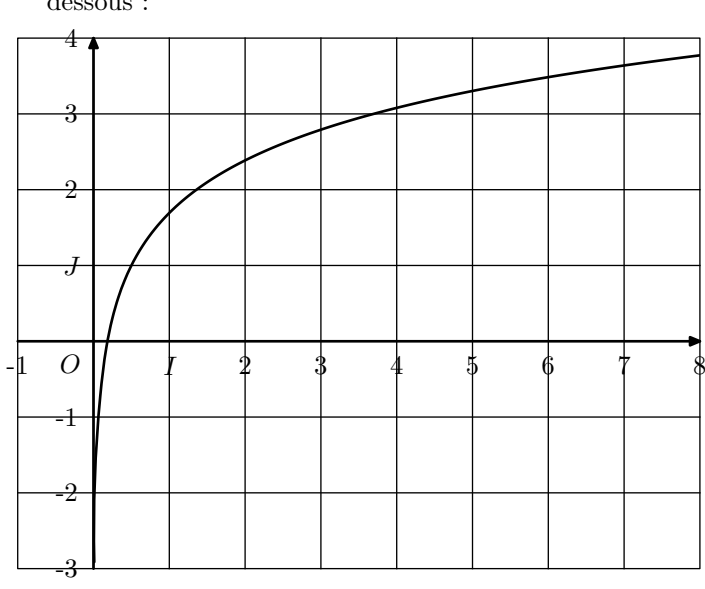
Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1; +\infty[$ une unique solution notée α .

b. Démontrer que : $\ln(2 \cdot \alpha) + 1 = \alpha$

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln(2 \cdot u_n) + 1.$$

On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(2 \cdot x)+1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous :



a. En utilisant la courbe (Γ) , construire sur l'axe des abscisses les quatres premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

E. Fonctions exponentielles:

Exercice E.1

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$

b. $-e^{2x} - e^x + 2 > 0$

Exercice E.2

a. $e^{2x} + 2 \cdot e^x - 3 = 0$

b. $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

Exercice E.3

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice E.4

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \cdot e^{-x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot (x^2 - x + 1)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 3x + 1$

f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} - e^{-x}$

Exercice E.5

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \cdot e^x$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 3 \cdot e^x + 1$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 3 \cdot e^x + 1$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Exercice E.6

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{3}{x}} - 1)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)$

Exercice E.7

Le but de cet exercice est de déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

1. Soit $X = \frac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :

$$\frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2} \cdot X^2 \cdot e^X$$

2. En déduire la valeur des limites recherchées.

Exercice E.8

1. On considère la suite (u_n) définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{-x}}{x^2 + 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2(x-1)e^{x-1}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + x)$$

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f .

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Peut-on prolonger g sur $\mathbb{R}$ par continuité.

Exercice E.9

Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

a. $f(x) = e^{-x}$

b. $g(x) = x \cdot e^x$

c. $h(x) = e^{x^2+x}$

d. $j(x) = \frac{1}{1 - e^x}$

Exercice E.10

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b. $g(x) = x \cdot e^{x^2+1}$

c. $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

d. $j(x) = \frac{e^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

Exercice E.11

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x \cdot e^{x+1}$

b. $g(x) = e^{x^2+1}$

c. $h(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{3x+1}$

d. $j(x) = \frac{e^{x+1}}{2 \cdot x + 1}$

e. $k(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x}$

f. $\ell(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$

Exercice E.12

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \cdot (e^x - e) + e - 2$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $g''(x) = (2 + x)e^x$
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

Exercice E.13

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x \cdot e^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g .
3. Donner le tableau de variations de g .
4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
c. Démontrer que : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ telle que :

$$A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$$

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie A.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0; +\infty[$.

Exercice E.14

Soit la fonction f définie explicitement sur une certaine partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ au moyen de la formule :

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - x - 2}$$

On propose l'étude de cette fonction f .

1. On pose : $g(x) = e^x - x - 2$.
a. Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de la dérivée $g'(x)$.
b. Trouver, par une mise en facteur de e^x , la limite de $g(x)$ lorsque $x \mapsto +\infty$.
c. En déduire qu'il existe deux réels, notés a et b , avec $a < b$, tels que : $g(a) = g(b) = 0$
d. Montrer que : $-2 < a < -1$; $1 < b < 2$
2. a. Déterminer dans $\mathcal{D}$ la dérivée de la fonction f et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$f'(x) = \frac{x \cdot u(x)}{[g(x)]^2}$$

b. Calculer la dérivée u'' de u' et étudier son signe.
c. Déduire de la question b. les variations de u' , ainsi que celles de u et montrer qu'il existe un réel, noté c tel que $u(c) = 0$. Montrer que $c < -2$.
d. Trouver enfin le signe de cette fonction u et le signe de la dérivée $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f . Montrer que la fonction f admet un minimum m dans un l'intervalle $]-\infty; a[$. Montrer que :
$$m = \frac{c \cdot (2 - c)}{c + 1}.$$
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$, a , b , $+\infty$. (Pour a et b , on distinguera les limites à droite et les limites à gauche).
5. Rassembler tous les résultats précédents en dessinant l'allure du graphe de la fonction f .

Exercice E.15

Etant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-k \cdot x}}$$

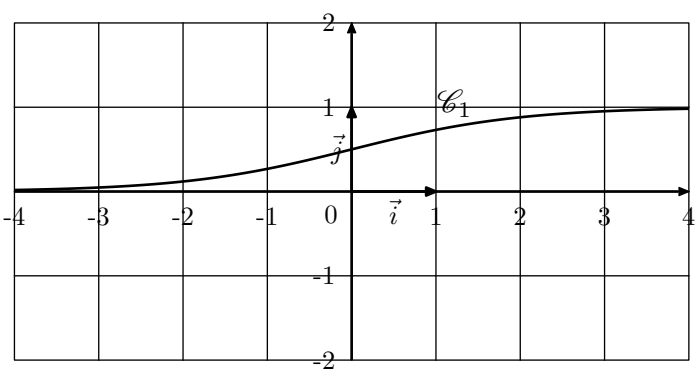
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie, on choisit $k=1$. On a , pour tout réel x :

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



- Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Démontrer que, pour tout réel x : $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
- On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x .

On note K milieu du segment $[MP]$.

- Montrer que, pour tout réel x : $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur le repère ci-dessous.

Exercice E.16

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$

- Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = (x+2) \cdot e^x$.
- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

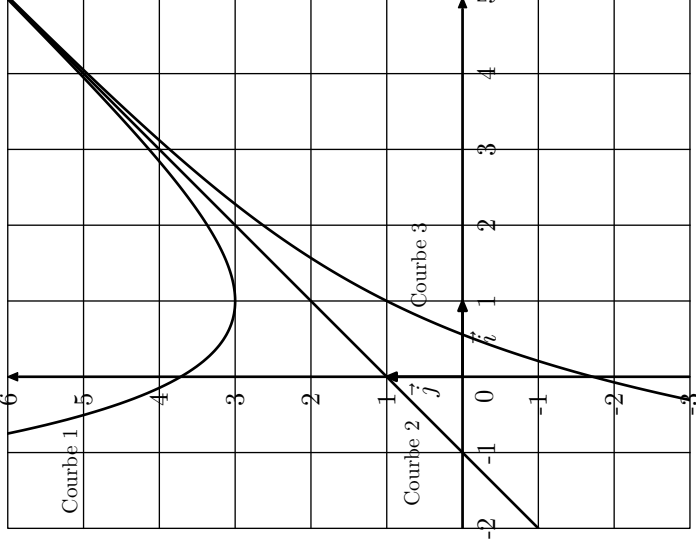
Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m \cdot e^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- Démontrer que :
 $g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $f(x) = m$.
 - Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
- On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).



Identifier chacune de ces courbes sur la figure ci-dessous en justifiant.

- Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .

Exercice E.17

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire :

La fonction d est définie sur $] -1; +\infty[$ par : $d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

- Calculer la fonction dérivée d' . En déduire les variations de d .
- Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
- Montrer que, pour tout $x > -1$: $0 < d(x) < e$

Partie B : Etude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

- Pour $x \in] -1; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Vérifier que : $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$
En déduire le sens de variations de f' .
 - Dresser le tableau de variations de f' .
(On admettra que $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$)
- Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non-nulle.

- Donner une valeur approchée de α au centième près.
- Etudier les variations de f .
 - Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Dresser le tableau de variations de f .

Partie C : Prolongement de la fonction f en -1

On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x > -1 \end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{G})$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

- Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} \right)$$

- b. Pour $x \in]-1; +\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$.

- c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et $(\mathcal{C}')$. Préciser les tangentes à $(\mathcal{C}')$ aux points d'abscisses -1 , α , 0 .

Exercice E.18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g .

2. Justifier que pour tout x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .

- b. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 .

- b. A l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T) .

4. Tracer la droite (T) , les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice E.19

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

1. **Etude d'une fonction auxiliaire :**

- a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 \cdot e^x - 1$$

Etudier le sens de variation de la fonction g .

- b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704[$.

- c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. **Etude de la fonction f :**

- a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

- b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Démontrer que pour tout réel strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel :

$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$$

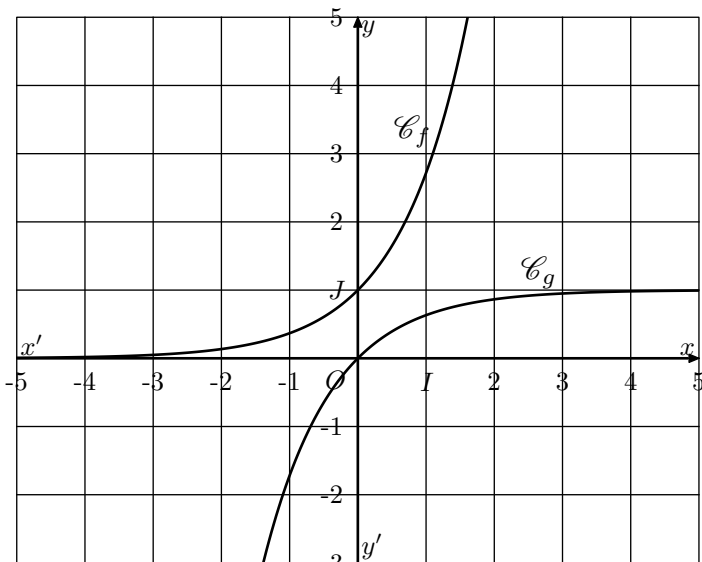
- e. Justifier que : $3,43 < m < 3,45$.

Exercice E.20

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad ; \quad g(x) = 1 - e^{-x}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont fournies dans la figure ci-dessous :



Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes. On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b .

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .

- b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B .

- c. En déduire que : $b = -a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation :

$$2(x-1)e^x + 1 = 0$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$$

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

- b. Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.

- c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

- b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.

A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontrera l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie **B**.

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie **C**).

- Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E .
- Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F .

Exercice E.21

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

- Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$
- Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
- Déterminer la dérivée de la fonction f .
- Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$
- $h_n(x) = 1 + 2x + \dots + n \cdot x^{n-1}$

- Vérifier que, pour tout réel x :
 $(1-x) \cdot g_n(x) = 1 - x^{n+1}$

On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

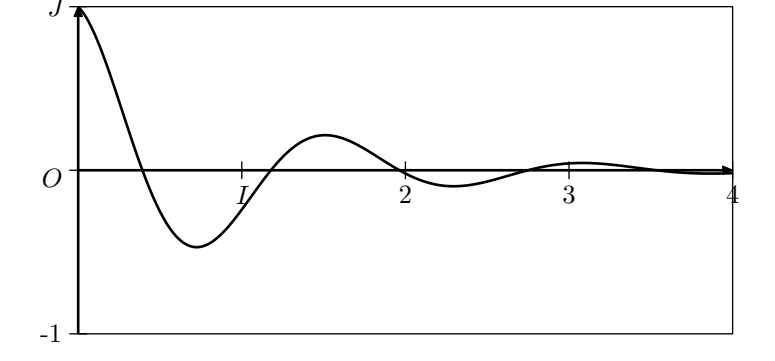
- Comparer les fonctions h_n et g'_n , g'_n étant la dérivée de la fonction g_n . En déduire, que pour tout réel $x \neq 1$:
$$h_n(x) = \frac{n \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + 1}{(1-x)^2}$$
- Soit $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie **A**.
En utilisant les résultats de la partie **B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice E.22

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:



On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{-x}$$

et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:
 $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$
 - En déduire la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.
- On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.
 - Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
 - En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
- Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:
 $f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)]$
 - En déduire que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.
- Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice E.23

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - x \cdot \ln x$

- Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
- Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :
 $g'(x) = -\ln x$
- Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

- Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
 - le sens de variation de la suite (u_n) ;
 - la limite éventuelle de la suite (u_n) .
- Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
 $v_n = \ln(u_n)$.
 - Montrer que : $v_n = n - n \cdot \ln n$.
 - En utilisant la partie **A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .
 - En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- Montrer que la suite (u_n) est bornée.
- Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice E.24

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (x^2 + x + 1) \cdot e^{-x} - 1$$

1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Etudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α .

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille annexe sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g . Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

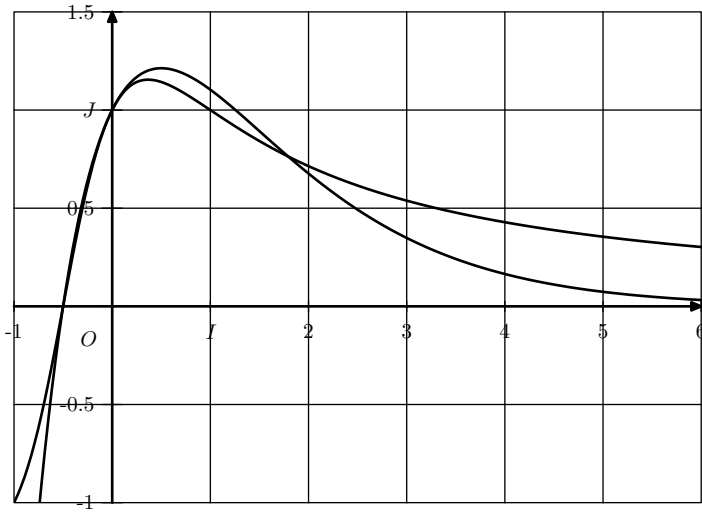
1. a. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
b. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1) \cdot \varphi(x)}{x^2 + x + 1}$$
où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
c. A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
d. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. a. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (-2x - 3) \cdot e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$$
est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.
b. En déduire l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.



Exercice E.25

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

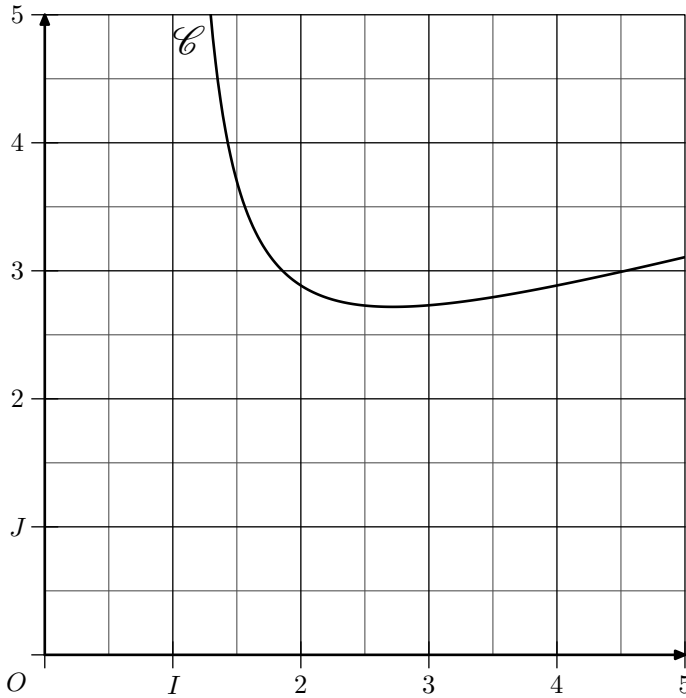
1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
b. Etudier les variations de la fonction f .
2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
 - a. On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2 . Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) .
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq e$ (on pourra utiliser la question 1. b.).
 - c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e; +\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$:

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, démontrer que : $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ .



Exercice E.26

On considère les matrices A , B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_{n+1} = A \cdot U_n + B \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Justifier que la matrice C vérifie l'égalité :

$$C = A \cdot C + B$$
2. On définit la suite (V_n) de matrices lignes par la relation :

$$V_n = U_n - C \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - a. Justifier l'égalité :

$$V_{n+1} = A \cdot V_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$U_n = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 9 \times 2^{n+1} + 1 \\ 3 \times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

Exercice E.27

Partie A - Etude du signe d’une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l’intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 4 \cdot \ln x$

- 1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2. Démontrer que l’équation $f(x)=0$ admet une solution α et une seule dans l’intervalle $]0; +\infty[$.
- 3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x .

Partie B - Une valeur approchée du réel α définie dans la partie A

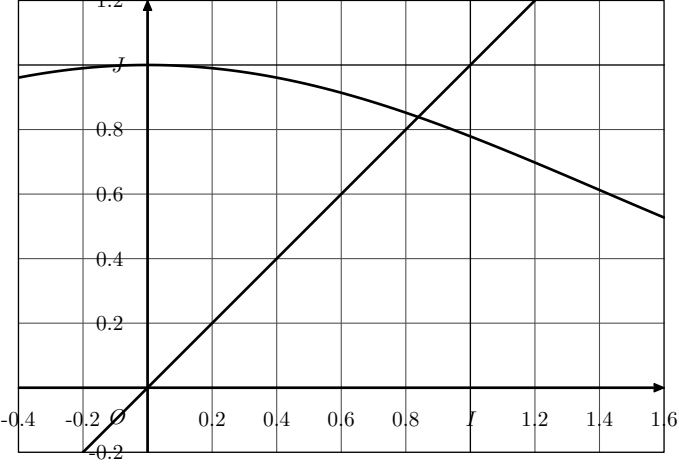
Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative de $(\mathcal{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}$

On a définie la suite (u_n) par :

$u_0=0,5 \quad ; \quad u_{n+1}=g(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$

- 1. Vérifier que α est l’unique solution de l’équation : $g(x) = x$.
- 2. Au moyen de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite d’équation $y=x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l’axe des abscisses.
Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
- 3. On admet que pour tout entier naturel n : $u_{2n} \leq a \leq u_{2n+1}$.
En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimale de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l’intervalle $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2 \ln x$

L’objectir de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ) , il y en a un et un seul qui est plus proche de l’origine O que tous les autres.

- 1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x .
- 2. a. Soit h la fonction définie sur l’intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x^2 + 4 \cdot (\ln x)^2$
Etudier les variations de la fonction h . On pourra utiliser la partie A.
- b. En déduire qu’il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ) , distinct de A , on a $OM > OA$.
- 3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T à la courbe (Γ) au point A .

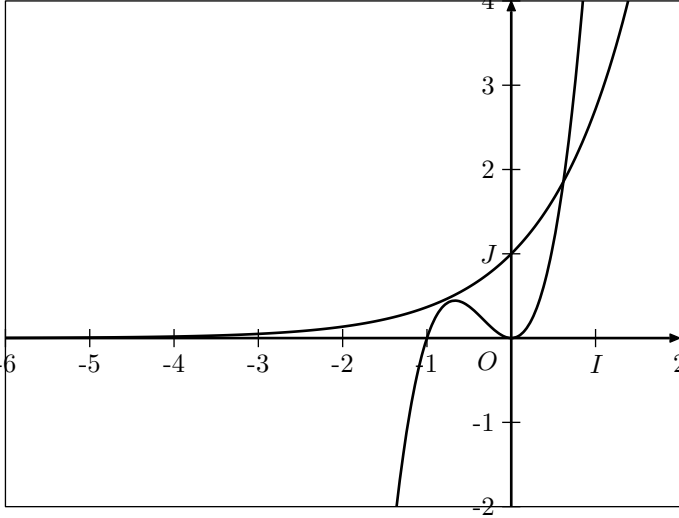
Exercice E.28

On considère l’équation (E) d’inconnue x réelle :

$e^x = 3(x^2 + x^3)$

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3 \cdot (x^2+x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



A l’aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l’équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

- 1. a. Etudier selon les valeurs de x , le signe de x^2+x^3 .
- b. En déduire que l’équation (E) n’a pas de solution sur l’intervalle $] -\infty ; -1]$.
- c. Vérifier que 0 n’est pas solution de (E) .
- 2. On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel de $] -1 ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ par : $h(x) = \ln 3 + \ln (x^2) + \ln(1 + x) - x$
Montrer que, sur $] -1 ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$, l’équation (E) équivaut à $h(x)=0$.
- 3. a. Pour tout réel x appartenant à $] -1 ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$, montrer qu’on a : $h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x + 1)}$
- b. Déterminer les variations de la fonction h .
- c. Déterminer le nombre de solutions de l’équation : $h(x) = 0$
et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
- d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice E.29

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l’épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l’intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
 - Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc :
pour tout entier naturel n , $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$
 - Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Placer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
 - Préciser la valeur de α_1 .
 - Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
- Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse 1.
 - Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln x - x + 1$
En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ .
 - Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n.$$
- Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

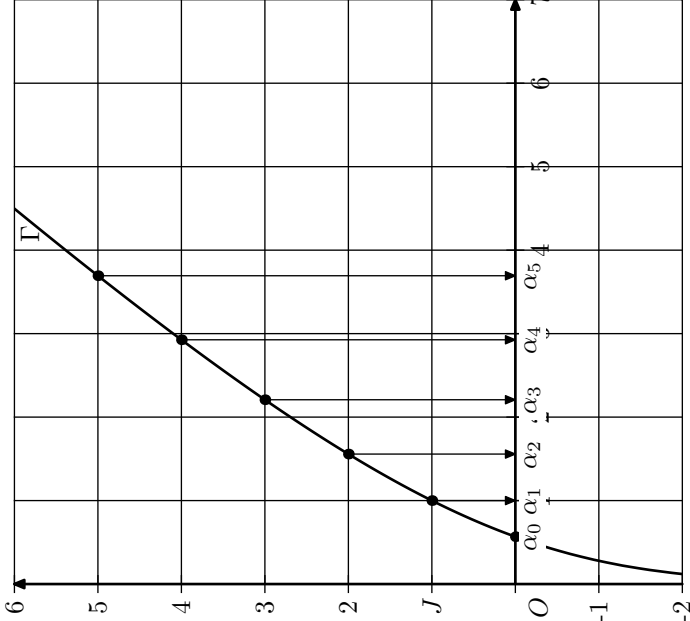
- Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

“Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ”

Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$*

- Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.



Exercice E.30

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
- Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$

Partie B

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$:
 $u_n \in [0; 1]$
- Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice E.31

On considère l'équation notée : $(E) : \ln x = -x$

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E) , admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x.$$

- Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4 \cdot x - \ln x}{5}$$

- Etude de quelques propriétés de la fonction g .
 - Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
 - Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $g(x) = x$.
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , par :
 $u_{n+1} = g(u_n)$
 - En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

3. Recherche d'une valeur approchée de α :

- a. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10} , arrondie à la sixième décimale.

- b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α .

En déduire un encadrement de α sous la forme :

$$u \leq \alpha \leq v$$

où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice E.32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (*unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées*)

1. a. Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = 1 + X - 2X^2.$$

Etudier le signe de $P(X)$.

- b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

- c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

3. Vérifier que $f(x) = e^{-2x} \cdot (e^{2x} + e^x - 2)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.

4. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f , calculer $f'(x)$.

- b. Montrer que $f'(x)$ a le signe que $(4 - e^x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

- c. Dresser le tableau de variations de f . On montrera que le maximum est un nombre rationnel.

5. a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.

- b. Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

6. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .

7. Tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice E.33

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = 2 \cdot x - 2 + \ln(x^2 + 1)$$

- a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

- b. Déterminer la dérivée de f_1 .

- c. Dresser le tableau de variations de f_1 .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = 2 \cdot x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$$

- a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

- b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0; +\infty[$.

- d. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 < \alpha_n < 1$$

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$f_n(\alpha_{n+1}) > 0$$

4. Etude de la suite (α_n) :

- a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

- b. En déduire qu'elle est convergente.

- c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2 \cdot n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Exercice E.34

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2) \cdot e^{-x}$$

- a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

- b. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4) \cdot e^{-x}.$$

- c. Dresser le tableau de variations de f .

- d. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (*unité graphique : 1 cm*).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx$

- a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

- b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = n \cdot I_{n-1} - \frac{1}{e}$.
Déterminer I_2 et I_3 .

- c. Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimé en cm^2 , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.

- a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$).

Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

- b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$ où f est la fonction définie dans la question 1.

Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

- c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice E.35

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Etudier la dérivabilité de f en 0.

- b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f .

3. Etudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g . Etudier le sens de variations de g' . En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

- b. Etudier le sens de variations de g .
En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{D}$.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente $\mathcal{D}$ (unité graphique 2 cm).

Partie C

n est un entier naturel non nul.

1. Exprimer en fonction de n le réel : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \cdot \ln x \, dx$
(on pourra utiliser une intégration par parties)

2. En déduire en fonction de l'entier n , l'aire $\mathcal{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente $\mathcal{D}$ et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

3. calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice E.36

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. Etablir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

5. calculer l'intégrale : $I = \int_0^3 f(x) \, dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle : (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20 \cdot e^{\frac{1}{2}t}$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

- a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$

- b. Résoudre l'équation différentielle (E').

- c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degré Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

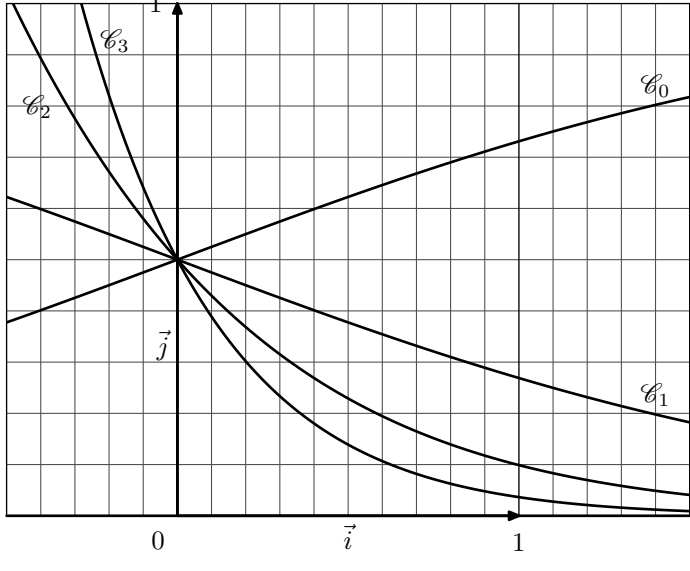
Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Exercice E.37

Soit n un entier naturel. On note f_n , la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathcal{C}_n$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.

2. Etude de la fonction f_0 .

- a. Etudier le sens de variation de f_0 .

- b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

- c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Etude de la fonction f_1 .

- a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x .
- b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
- c. Donner une interprétation géométrique de la question 3. a. pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

4. Etude de la fonction f_n pour $n \geq 2$.

- a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x , on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$$

- b. Etudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
- c. Calculer la dérivée $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude d'une suite liée aux fonctions f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n \, dx$

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0 .

2. Démontrer que, pour tout entier n :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx} \, dx$$

3. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 e^{-nx} \, dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

F. Intégration:

Exercice F.1

Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

- a. $f'(x) = 3$ b. $f'(x) = 2x + 1$ c. $f'(x) = x^3$
- d. $f'(x) = -\frac{2}{x}$ e. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ f. $f'(x) = e^{2x}$

Exercice F.2

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = (x + 3)^4$ b. $g(x) = (2 - x)^3$
- c. $h(x) = (2x - 3)^2$ d. $j(x) = x \cdot (x^2 + 1)^6$
- e. $k(x) = 3x^2 \cdot (x^3 - 2)^3$ f. $\ell(x) = x^4 \cdot (1 - x^5)^2$

Exercice F.3

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x^2 \cdot (x^3 - 5)^5$ b. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- c. $h(x) = \frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x - 5)^2}$ d. $j(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x - 5}$

Exercice F.4

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = e^{3x+1}$ b. $g(x) = x \cdot e^{x^2}$ c. $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$
- d. $j(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ e. $k(x) = \frac{e^{\frac{x+1}{x}}}{x^2}$ f. $\ell(x) = \frac{e^{\ln(x)+1}}{x}$

Exercice F.5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x \cdot \ln x - x$$

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
2. En déduire l'expression des primitives de la fonction logarithme népérien.

Exercice F.6

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

1. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

2. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice F.7

Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous :

- a. $f(x) = \frac{2}{2x + 3}$ b. $g(x) = \frac{1}{1 - 3x}$
- c. $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ d. $j(x) = \frac{-1}{(1 + x)^2}$
- e. $k(x) = \frac{2}{(3x + 1)^2}$ f. $\ell(x) = \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

Exercice F.8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4 \cdot e^{2x+2} - e^{x+1}}{e^{2x+2} - 1}$$

1. Montrer que la fonction f admet pour expression :

$$f(x) = \frac{3 \cdot e^{2x+2}}{e^{2x+2} - 1} + \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + 1}$$

(Indication : on pensera à factoriser $e^{2x+2} - 1$)

2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction f .

Exercice F.9

Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

- a. $f(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 4}{x}$; $F(1) = 2$
- b. $g(x) = x \cdot e^{x^2}$; $G(1) = 3 \cdot e$
- c. $h(x) = \frac{5}{(4 \cdot x - 3)^2}$; $H(1) = 1$
- d. $j(x) = \frac{2 \cdot x - 3}{x^2 - 2x + 1}$; $J(0) = -2$

Exercice F.10

Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

a. $f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 2)^4$; $F(-1) = 1$

b. $g(x) = \frac{x}{3x^2 - 2}$; $G(3) = \ln 5$

c. $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$; $H(4) = 3$

d. $j(x) = (x + 1)e^{x^2 + 2x}$; $J(1) = e^3$

Exercice F.11

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-3}^2 x + 1 \, dx$

b. $\int_0^5 (2x - 5)^2 \, dx$

c. $\int_{-3}^1 (1 - x)^3 \, dx$

d. $\int_1^4 \frac{x}{(2 \cdot x^2 + 1)^2} \, dx$

e. $\int_4^6 \frac{2 \cdot x}{x^2 - 3} \, dx$

f. $\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \, dx$

Exercice F.12

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_4^5 \frac{\ln x}{x} \, dx$

b. $\int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{x+3}} \, dx$

c. $\int_{-1}^3 \frac{1}{x+4} \, dx$

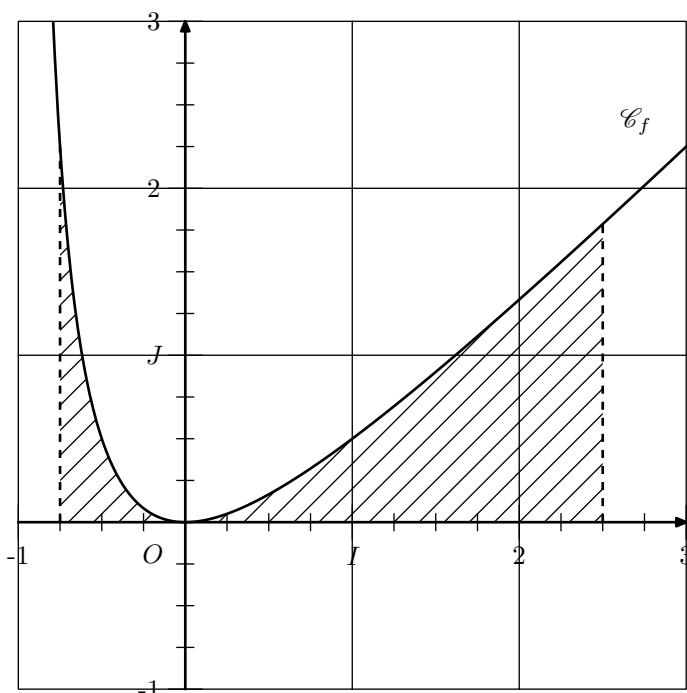
d. $\int_{-1}^1 x^2 \cdot (2 \cdot x^3 + 2)^2 \, dx$

Exercice F.13

1. Soit f la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]1; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$, on a :



a. Déterminer la valeur des nombres réels a , b et c vérifiant l'égalité suivante pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{c}{x+1}$$

b. Déterminer l'expression d'une primitive de la fonction f .

c. Calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations :

$$x = -\frac{3}{4} \quad ; \quad x = \frac{5}{2} \quad ; \quad y = 0$$

d. Sachant que cette représentation est réalisée avec l'échelle :
1 unité = 1,5 cm
Donner l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 arrondi à l'unité.

2. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^3 x \cdot e^{x^2+1} \, dx$

b. $\int_0^2 \frac{x \cdot e^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)^2} \, dx$

Exercice F.14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 3}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x + 2$. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_1$.

2. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$$

b. Soit λ un réel strictement négatif.

On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par

$\mathcal{D}_1$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équations :

$$x = \lambda \quad ; \quad x = 0$$

Montrer que $\mathcal{A}_\lambda = 4 \cdot \ln 4 - 4 \cdot \ln(e^\lambda + 3)$

c. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Exercice F.15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} \, dx$$

1. Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

Exercice F.16

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} \, dx$$

1. Justifier l'égalité : $I + J = 1$.

2. a. Déterminer la valeur de l'intégrale I .

b. En déduire la valeur de l'intégrale J .

Exercice F.17

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$$

On donne ci-dessous le tableau de variations de g :

x	0	2, 3	x_0	2, 4	$+\infty$
Variation de g	$+\infty$		0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans

ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$$

- a. Montrer que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

- b. Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t) dt$ en fonction de a .

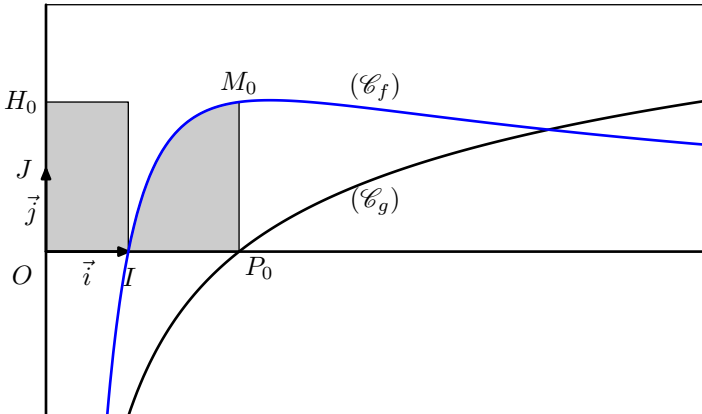
3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

On appelle I le point de coordonnées $(1; 0)$, P_0 le point d'intersection de $(\mathcal{C}_g)$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $(\mathcal{C}_f)$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $(\mathcal{D}_1)$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $(\mathcal{D}_2)$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



Exercice F.18

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

- Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E) .
- Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : y' + y = 0$
- Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (E_0) .
- En déduire toutes les solutions de (E) .
- Déterminer la fonction f_2 , solution de (E) , qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer les limites f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
- Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x .
- En déduire le tableau de variations de f_k .

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$$

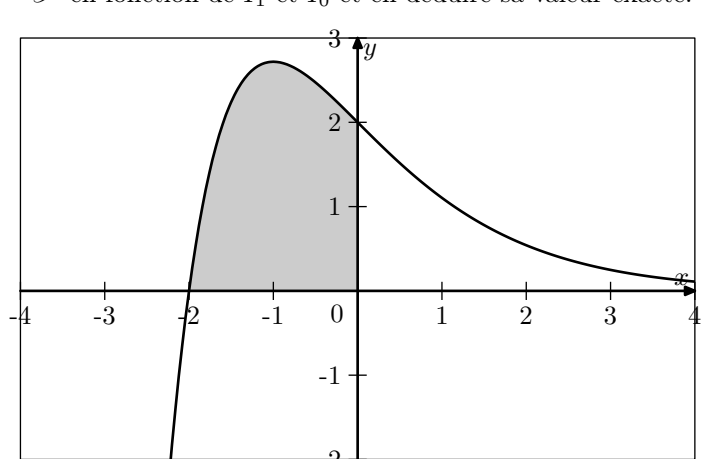
et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

- a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .
- b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n$
- c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe $\mathcal{C}_k$ qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

- a. A l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.
- b. Soit $\mathcal{S}$ l'aire de la partie hachurée (*en unité d'aire*); exprimer $\mathcal{S}$ en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



Exercice F.19

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}$ peut-on en tirer?
- b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f' .
- c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- a. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n .
- b. Calculer I_1 , puis I_2 .
- c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2 . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour

tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$$

- b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice F.20

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

Sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans un repère orthogonal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ($\mathcal{C}$) au point O ?

2. On pose : $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

- a. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

- b. Calculer I .

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2., calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

La suite (u_n) converge-t-elle?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice F.21

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

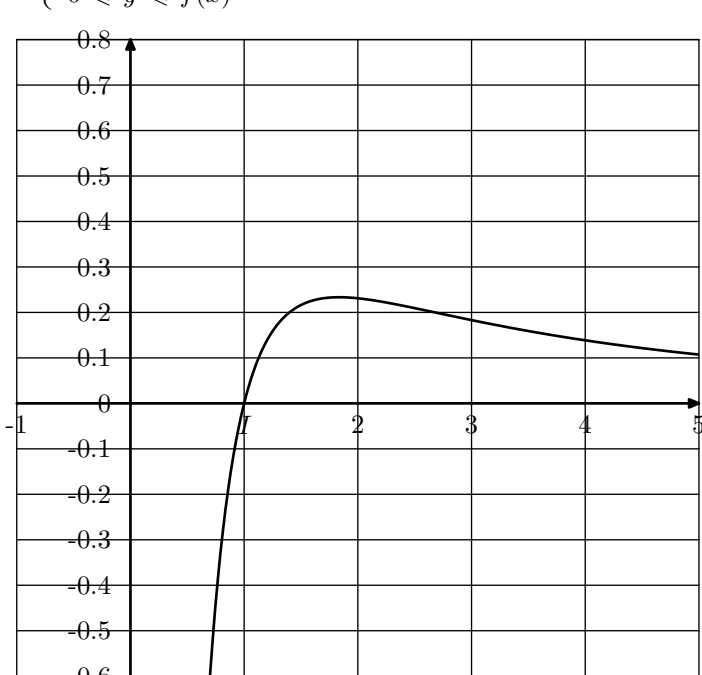
1. Montrer que pour tout $x > 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

2. a. Calculer $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ et $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière)

- b. En déduire un encadrement de $K = \int_2^4 f(x) dx$.

3. la figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ et on note } \mathcal{A} \text{ son aire.}$$



A l'aide de l'encadrement trouvé au 2. b., donner un encadrement de $\mathcal{A}$ en cm^2 .

Exercice F.22

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x e^{-x+2}$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathcal{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $[1; +\infty[$.

- b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

- c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α .

Partie B

1. A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$$

2. On définit le solide $\mathcal{S}$ obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y=f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$ dans le plan (xOy) (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ du solide est donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$

- a. Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de I .

- b. Déterminer alors une valeur approchée à $1 cm^3$ près du volume du solide.

Exercice F.23

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$$

- a. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

- b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \ln x \, dx$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \cdot \ln 2 + q \cdot \ln 3$, avec p et q rationnels.

Exercice F.24

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2 . On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x \, dx$$

1. Calculer I_1 .

2. Etablir que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Démontrer par récurrence que :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

- a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$:
- $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$:

$$0 \leq u_n \leq u_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n) .

7. Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

Exercice F.25

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit $a \in [0; +\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} \, dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} \, dt$$

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a .

2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a .

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que :

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$:

$$P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$

Démontrer en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que :

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$$

5. Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 \, dt$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0; a]$:

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$$

- b. Démontrez que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$J(a) \leq I_5(a) \leq 0$$

7. En déduire que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.$$

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice F.26

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^4 x \cdot e^x \, dx$

b. $\int_0^5 t \cdot e^{2 \cdot t} \, dt$

c. $\int_e^1 \ln t \, dt$

d. $\int_0^1 (2 \cdot x + 1) \cdot \ln(x+1) \, dx$

e. $\int_1^e \frac{5 \cdot \ln x}{x^2} \, dx$

f. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \cdot \ln x \, dx$

Exercice F.27

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-2}^3 x^2 \cdot e^x \, dx$

b. $\int_1^5 (1-t^2) e^{-t} \, dt$

Exercice F.28

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \, dx$

b. $\int_1^{\ln 3} e^t \cdot (t-1) \, dt$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \sin 3x \, dx$

d. $\int_1^e x \cdot (1 - \ln x) \, dx$

Exercice F.29

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} \, dx$$

1. Calculer I_2 .

2. Une relation de récurrence :

- a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

- b. Calculer I_3 .

Exercice F.30

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée dans l'annexe.

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1) \cdot e^{1-t} dt$$

- Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1; +\infty[$.
- Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x appartenant à $[1; +\infty[$:

$$F(x) = -x \cdot e^{1-x} + 1$$

- Démontrer que sur $[1; +\infty[$, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation :

$$\ln(2x) + 1 = x$$

Exercice F.31

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \cdot \sqrt{1+t} dt$$

- Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
- Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite (I_n) , pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1) \cdot e^{-t} dt$$

- Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\sqrt{t+1} \leq t+1$$
- En déduire que : $J_n \leq I_n$.
- Calculer I_n en fonction de n . En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
- Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice F.32

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x , $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 5]$.

- On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.
 - Montrer que la suite (I_n) est croissante.
- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :
$$\int_a^b f(x) dx = (-2-b) \cdot e^{-b} + (2+a) \cdot e^{-a}$$
 - En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
 - Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
 - Donner une interprétation graphique de cette limite.

- Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^a f(x) dx = e$
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Exercice F.33

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi e^x \cdot \cos(n \cdot x) dx$$

- Montrer que, pour tout entier naturel n :
- $$\cos(n \cdot x) = (-1)^n \quad ; \quad \sin(n \cdot \pi) = 0$$

- A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{(-1)^n \cdot e^\pi - 1}{1 + n^2}$$

Exercice F.34

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20 \cdot x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Exercice F.35

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

- Etudier les variations de la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$
sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$
 - Soit J et K les intégrales définies par :
- $$J = \int_0^1 (2+x) \cdot e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$$
- Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :

$$J = 3 - \frac{4}{e}$$
 - Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que :

$$\frac{1}{3 \cdot e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$
 - Démontrer que : $J + K = 4 \cdot I$.
 - Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis

donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

Exercice F.36

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie

$$\text{par : } I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

1. Calculer I_2 .

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

Exercice F.37

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La probabilité pour un client d'attendre moins de t minutes est définie par :

$$\mathcal{P}(X \leq t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$ en fonction de t .

2. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$

3. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

Exercice F.38

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2} \cdot x + 1$$

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x) dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par :

• la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses ;

• les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

(on admettra que la fonction f est positive sur $[\frac{1}{2}; 1]$)

Exercice F.39

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$$

Exercice F.40

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 1]$ par : $f(x) = 1 + x \cdot \ln x$

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [1 - f(x)] dx$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

2. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$

3. On admet que la fonction f est positive sur $]0; 1]$. Interpréter graphiquement le résultat précédente.

Exercice F.41

Le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

On note f' la fonction dérivée de f .

Pour tout nombre réel a , on considère l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a f(x) dx$$

1. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

2. A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a) = 2 - 2 \cdot e^{-a} \cdot \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$$

Exercice F.42

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie

$$\text{par : } I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

1. Calculer I_2

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

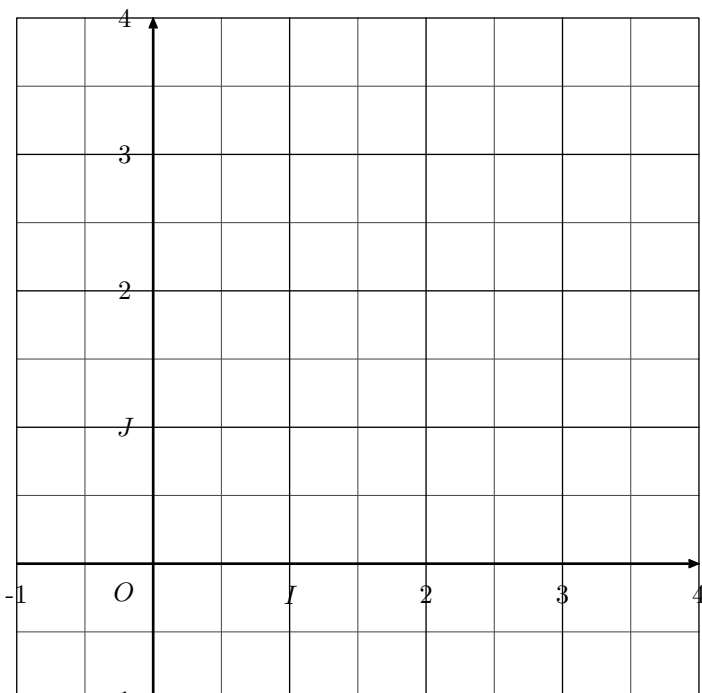
$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) \cdot I_n$$

3. Calculer I_3 .

Exercice F.43

On considère la fonction partie entière E qui renvoie à tout nombre réel sa partie entière.

1. Dans le repère ci-dessous, représenter la courbe représentative de la fonction E sur l'intervalle $[-1; 4]$.



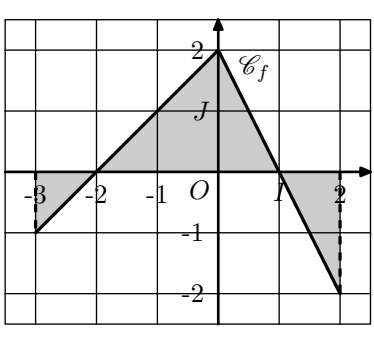
2. Déterminer la mesure de l'intégrale : $\int_0^4 E(x) dx$

Exercice F.44

On considère la fonction f affine par morceaux dont la représentation est donnée ci-dessous :

- Déterminer l'aire de la partie grisée.
- Déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-3}^2 f(x) \, dx$$



Exercice F.45

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	0	$\ln 5$	0

Déterminer, si possible, le signe des intégrales suivantes :

- $\int_1^3 f(x) \, dx$
- $\int_{-2}^0 f(x) \, dx$
- $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$
- $\int_3^e f(x) \, dx$
- $\int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 2} f(x) \, dx$
- $\int_1^{e^{\frac{1}{2}}} f(x) \, dx$

Exercice F.46

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$$

On définit la suite (u_n) de nombres réels par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Etablir, pour tout entier naturel n , la comparaison :

$$u_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

- En déduire que la suite (u_n) est convergente et converge vers 0.

Exercice F.47

Soit n un entier naturel. On note f_n , la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}}$$

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx$

- Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0 .
- Démontrer que, pour tout entier n :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-n \cdot x} \, dx$$

- Calculer l'intégrale : $\int_0^1 e^{-n \cdot x} \, dx$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice F.48

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par la relation :

$$f(x) = x^n \cdot \sqrt{x} \quad \text{pour } x \in [0; 1]$$

On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{x} \, dx$$

- Justifier que tous les termes de la suite sont positifs.

- En étudiant le signe de la fonction : $x \mapsto x^{n+1} \cdot \sqrt{x} - x^n \cdot \sqrt{x}$,
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice F.49

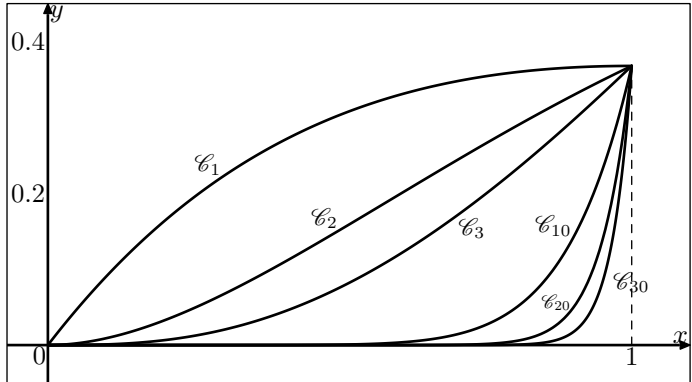
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} \, dx$$

- On considère les deux fonctions f et g définies par :
 $f(x) = x \cdot e^{-x}$; $g(x) = (-x - 1) \cdot e^{-x}$
Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction f .
- Calculer I_1 .

- Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions de courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$, $\mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



- Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
- Démontrer cette conjecture.
- En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice F.50

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_n = \int_0^n x \cdot e^{-x} \, dx$$

Justifier que la suite (u_n) est croissante.

Exercice F.51

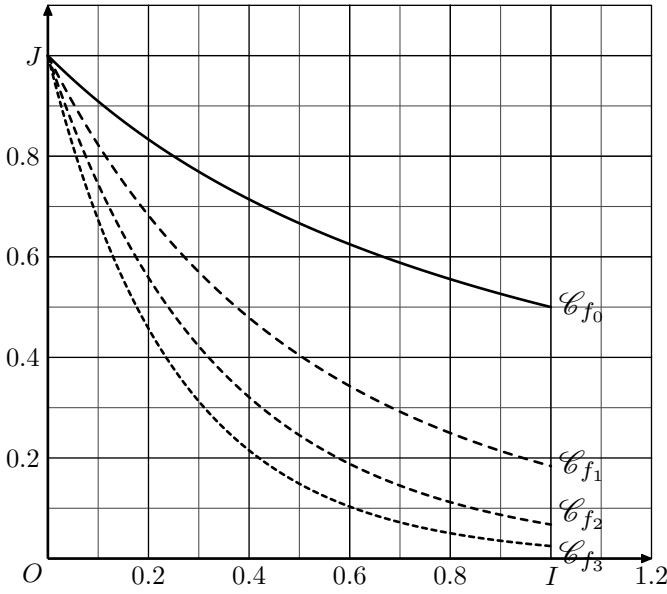
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} \, dx \quad ; \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \, dx$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n .



- a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

- b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$:

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}$$

- b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

Exercice F.52

On souhaite encadrer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx$

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

1. Etudier les variations de f sur $[0; 1]$.

2. On pose, pour tout entier n compris entre 0 et 5 :

$$S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{5}\right).$$

- a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5} \cdot f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} \cdot f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

- b. En déduire que :

$$\frac{1}{5} \cdot S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} \cdot (S_5 - 1)$$

- c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement :

$$1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164$$

Exercice F.53

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n :

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2. a. Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité :

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$$

$$\text{En déduire que } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{Démontrer l'inégalité : } \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

- b. Ecrire l'inégalité précédente en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n :

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

- c. En déduire que pour tout entier strictement positif n :

$$u_n \geq 0$$

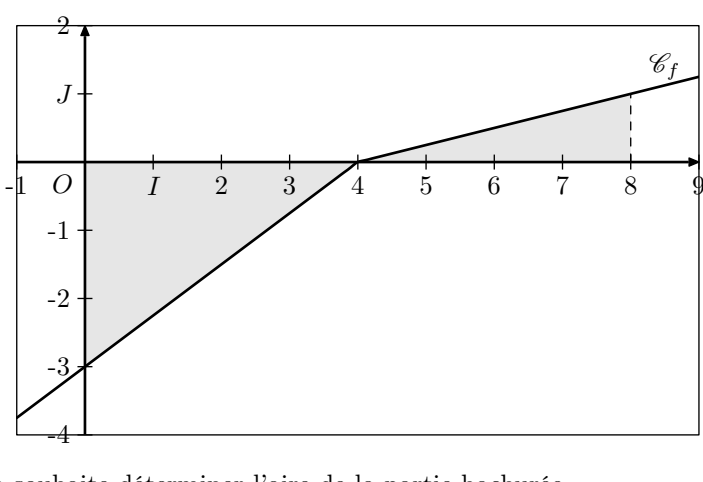
3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Exercice F.54

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 - \frac{1}{4} \cdot |x - 4|$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ orthonormal :



On souhaite déterminer l'aire de la partie hachurée.

1. Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des intervalles $[0; 4]$ et $[4; 8]$.

2. Déterminer l'aire de la surface hachurée.

Exercice F.55

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 7}$$

- Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \ln 7]$.

Exercice F.56

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 250]$ par la relation :

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19 \cdot e^{-0,04t}}$$

- Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; 250]$, on a : $f(t) = \frac{2 \cdot e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$
- Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 250]$ par : $F(t) = 50 \cdot \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .
- Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice F.57

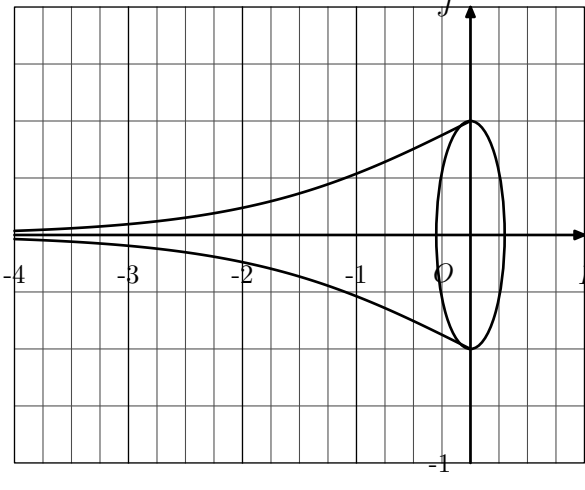
On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Soit λ un réel positif, on note $\mathcal{V}(\lambda)$ l'intégrale :

$$\int_{-\lambda}^0 \pi \cdot [f(x)]^2 dx$$

On admet que $\mathcal{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathcal{C}$ obtenue pour $-\lambda \leq x \leq 0$.



- Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre réel x : $\frac{e^{2 \cdot x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{a \cdot e^x}{e^x + 1} + \frac{b \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$
- Exprimer $\mathcal{V}(\lambda)$ en fonction de λ .
- Déterminer la limite de $\mathcal{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice F.58

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} \quad ; \quad g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

- Identifier $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur la figure fournie. (*Justifier la réponse apportée*).
- Etudier la parité des fonctions f et g (**hors programme**).
- Etudier le sens de variation de f et g . Etudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
- Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

- Que représente G pour la fonction g ?
- Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
- Etudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.

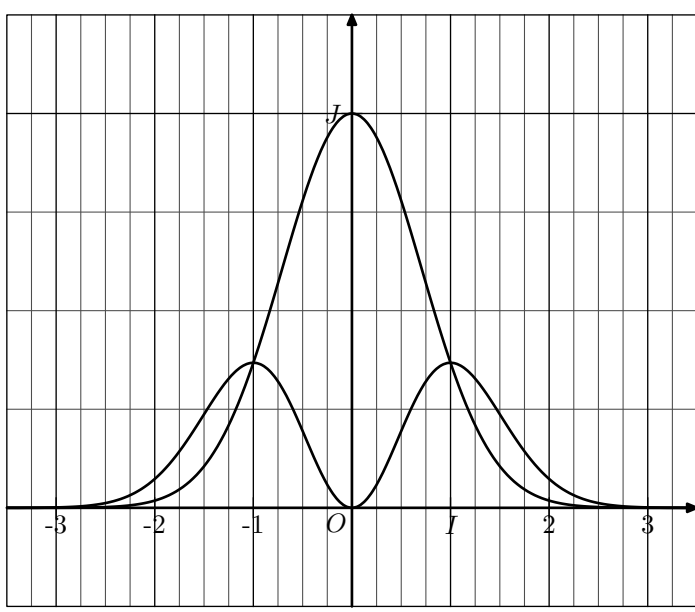
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{pour tout réel } x$$

- Démontrer que : $G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$ pour tout réel x (*on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \mapsto \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$*).

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{A}$ limité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

- Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.
 - Interpréter en termes d'aires le réel : $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt$.
 - En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathcal{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la demi-droite $[O; \vec{i})$ et la courbe $\mathcal{C}_g$, justifier graphiquement que : $\int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt \geq \frac{\ell}{2}$ (*on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie*)



Exercice F.59

Partie A

Restitution organisée de connaissances. On supposera connus les résultats suivants :

$$e^0 = 1 \quad ; \quad \text{pour tous réels } x \text{ et } y : \quad e^x \times e^y = e^{x+y}$$

- Démontrer que pour tout réel x : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n : $(e^x)^n = e^{n \cdot x}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx, \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

- Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$.
 - Calculer u_1 . En déduire u_0 .
- Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 0$.
- Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
 - En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$

- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice F.60

Partie A

On donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘ 0	↗ $4e^{-2}$	↘ 0

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_2^x f(t) dt$

- Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que : $0 \leq F(3) \leq 4 \cdot e^{-2}$

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$

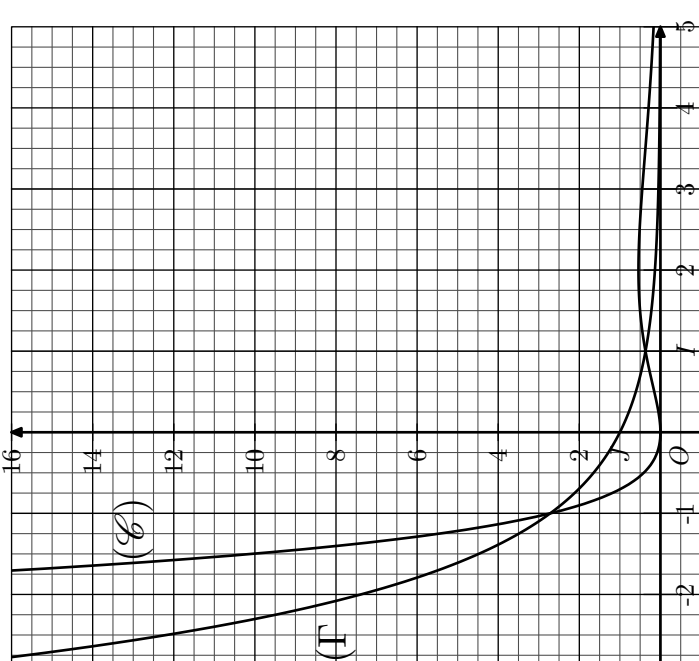
On désigne par $(\mathcal{C})$ et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans une repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Les courbes sont tracées en annexe.

- Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A. On ne demande pas de justifier les limites.
 - Etudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) .
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$
 - Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (-x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
 - Soit un réel α supérieur ou égal à 1. On considère la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$. Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.
 - Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
- On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y=m$ coupe la courbe $(\mathcal{C})$ au point $P(x_P; m)$ et la courbe (Γ) au point $Q(x_Q; m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P , appartenant à l'intervalle $] -\infty; -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

- Faire apparaître approximativement sur le graphique (*proposé en annexe*) les points P et Q tels que $x_P \in] -\infty; -1]$ et $PQ = 1$.
- Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et x_Q . Justifier l'égalité : $f(x_P) = g(x_Q)$.
- Déterminer la valeur de x_P telle que : $PQ = 1$.



Exercice F.61

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} ; \quad v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1$$

1. a. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} ; \quad 0 \leq v_n \leq 1$$

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n) .

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice F.62

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 3 cm.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0; +\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 0.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique u . Montrer que u appartient à $[1; 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .

5. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure.

6. a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$\frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$

b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T) , $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $x=1$ (on admettra que T est au-dessus de $(\mathcal{C})$).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$$

1. Calculer $f'_n(x)$ et donner son signe sur $[0; +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Dresser le tableau de variations de f_n .

2. a. Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

b. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$e^{n+1} > 2 \cdot n + 1$$

En déduire le signe de $f_n(n+1)$.

c. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique sur $[n; n+1]$; cette solution est notée u_n .

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

4. a. En remarquant que, pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2 \cdot n}{x+n}$$

Montrer que la valeur moyenne M_n de f_n sur $[0; u_n]$ est égale à :

$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{e^{-n}}{u_n} - 2 \cdot \left(\frac{n}{u_n}\right) \cdot \ln\left(\frac{u_n}{n} + 1\right)$$

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

G. Suites numériques:

Exercice G.1

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. a. Démontrer que pour tout $n \geq 3$: $u_n \geq 0$.

b. En déduire que pour tout $n \geq 4$: $u_n \geq n - 2$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6.$$

c. Vérifier que pour tout entier naturel n , $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Exercice G.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang n :

$$u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}$$

2. Etablir l'encadrement suivant :

$$0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non nul : $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$
2. En déduire la convergence de la suite (u_n) ; on précisera la valeur de la limite.

Exercice G.4

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :
 $u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ si, et seulement si, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$
2. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :
 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$
 - a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
 - b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1; +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
 - c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
 - d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :
 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.
3.
 - a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
 - b. Que peut-on déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :
 $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$
 En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice G.5

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1,4 \cdot v_n - 0,05 \cdot v_n^2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 1,4x - 0,05 \cdot x^2$
 - a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$
2. Etablir la convergence de la suite (v_n) (on ne demandera pas la valeur de la limite).

Exercice G.6

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot u_n + \frac{2}{5} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas la valeur de la limite).

Exercice G.7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

1. Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $f(x) \in [0; 2]$
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Etablir la convergence de la suite (u_n) (on ne demande pas la valeur de la limite).

Exercice G.8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n}{1 + 2 \cdot u_n}$$

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) converge. (on ne demande pas la valeur de la limite).

Exercice G.9

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{2. a. Calculer } \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$$

- b. Déduire en utilisant 1., que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

puisque

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2. b.)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ .
 Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

Exercice G.10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. a. Etablir, par un raisonnement par récurrence, l'inégalité suivante pour tout entier naturel n :

$$u_n > n^2$$
b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.11

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$:

$$u_n \geq 0.$$
b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$:

$$u_n \geq n - 3$$
c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice G.12

On souhaite étudier la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction du rang n .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.13

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 0,2 \cdot u_n + 0,04 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par la relation :

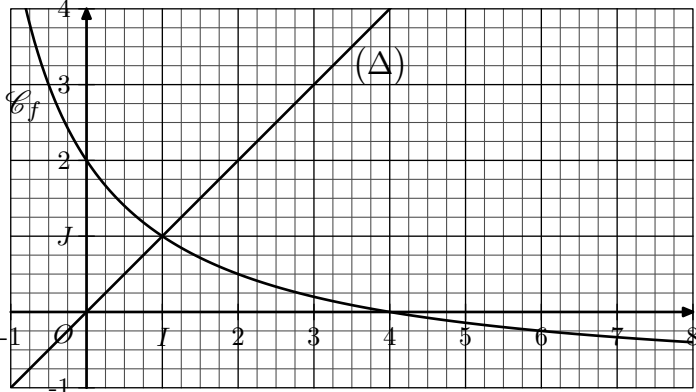
$$v_n = u_n - 0,05$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Déterminer l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n . En déduire l'expression des termes la suite (u_n) en fonction de n .
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.14

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormal, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{-x + 4}{x + 2}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Sur l'axe des abscisses, présenter les valeurs des six premiers termes de la suite.
2. Déterminer, par le calcul, les trois premiers termes de la suite (u_n) .
3. On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 4}$$
a. Etablir l'égalité suivante : $w_{n+1} = \frac{-2u_n + 2}{3u_n + 12}$
b. En déduire que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.
c. Donner l'expression du terme w_n en fonction de n .
4. a. Etablir l'égalité : $u_n = -4 - \frac{5}{w_n - 1}$
b. En déduire la formule explicite de la suite (u_n)
5. En déduire la limite de la suite (w_n) .

Exercice G.15

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 + 0,5 \cdot u_n}{0,5 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$v_n \neq 1.$$
b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$
c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.16

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On définit les termes de la suite (u_n) par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

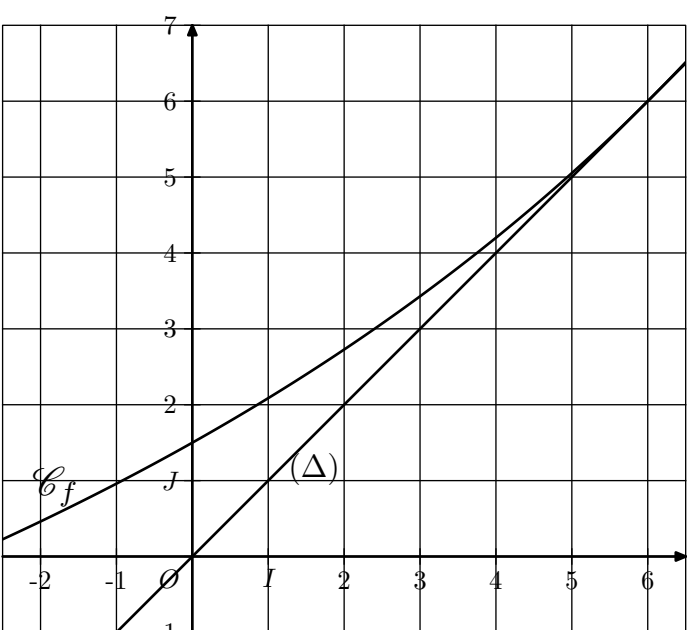
1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice G.17

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n) .
- Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n) .
- On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
 - Etablir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$
 - Donner la nature et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n .
 - Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n .
- En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice G.18

On considère la suite numérique (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$
 - Démontrer que la suite (v_n) est convergente.
- On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par : $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$
 - Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
 - En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Exercice G.19

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3} \cdot n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - n$$

- Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
- En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.20

On définit la suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$

- Par transformation successive, établir l'égalité suivante :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n.$$
- En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n .

Exercice G.21

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{4}{3} \cdot u_{n+1} - \frac{1}{3} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Déterminer la valeur exacte des cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
 - Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
 - Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; on précisera ses éléments caractéristiques.
- Par un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{3}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$
- En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice G.22

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le premier terme est 0 définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot u_n - 3 \cdot n - 8 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$v_n = u_n + 5n + 5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b. En déduire la formule explicite de la suite (u_n) d'un terme en fonction de n son rang.

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice G.23

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leq 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice G.24

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2 \cdot n} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \frac{u_n}{n}$
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1 .
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \frac{n}{2^n}$

Exercice G.25

On considère les deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont : $p_0 = 5$; $q_0 = 2$

Elles sont définies par les relations de récurrences suivantes :

$$p_{n+1} = 0,5 \cdot p_n + 0,4 \cdot q_n \quad ; \quad q_{n+1} = 0,4 \cdot p_n + 0,5 \cdot q_n$$

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations suivantes :

$$u_n = q_n + p_n \quad ; \quad v_n = p_n - q_n$$

1. Déterminer la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) .
2. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) .
4. a. En remarquant que $u_n + v_n = 2 \cdot p_n$, déduire que la suite (p_n) est convergente ; préciser sa limite.
b. Etablir que la suite (q_n) est convergente ; déterminer sa limite.

Exercice G.26

On considère les trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 & ; & b_0 = c_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ a_n + b_n + c_n = 1 & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = \frac{1}{6} \cdot a_n$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel p : $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et } b_{2p+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$
3. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice G.27

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$
 - a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n .
 - b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1; e]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
 - a. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n; 0)$.
 - b. Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .
 - c. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n .
 - d. Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n) .
3. a. Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et α_n .
b. Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$
c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n) .
d. Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Etablir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ .
4. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = e$.
 - a. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\frac{\alpha_n^2}{n}$.
 - b. Etablir que : $(e - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n)$
 - c. En déduire un encadrement de $n(e - \alpha_n)$.
 - d. la suite de terme général $n(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

Exercice G.28

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad ; \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

- Etudier les variations de f et de g sur $[0; +\infty[$.
- En déduire que pour tout $x \geqslant 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définies par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

- Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

- On pose :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

A l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n$$

- Calculer S_n et T_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

- Etude de la convergence de la suite (u_n) .

- Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

- En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

- On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leqslant \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$$

Montrer alors que $\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ .

Exercice G.29

- Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

- Comparer les quatres premiers termes de la suite u aux quatres premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = \frac{n}{n+1}.$$

- A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = w_n$.

- Soit v la suite de terme général v_n défini par :

$$v_n = \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien :

- Montrer que : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

- Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

Exprimer S_n en fonction de n .

Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice G.30

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 6[$ par :

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit la suite (U_n) par :

$$U_0 = -3 \quad ; \quad U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- La courbe représentative de la fonction f est donné sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y=x$. Construire, sur cette feuille annexe les points :

$$M_0(U_0;0) \quad ; \quad M_1(U_1;0) \quad ; \quad M_2(U_2;0) \quad ; \quad M_3(U_3;0) \quad ; \quad M_4(U_4;0)$$

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

- Démontrer que si $x < 3$ alors $\frac{9}{6-x} < 3$.

En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .

- Etudier le sens de variation de la suite (U_n) .

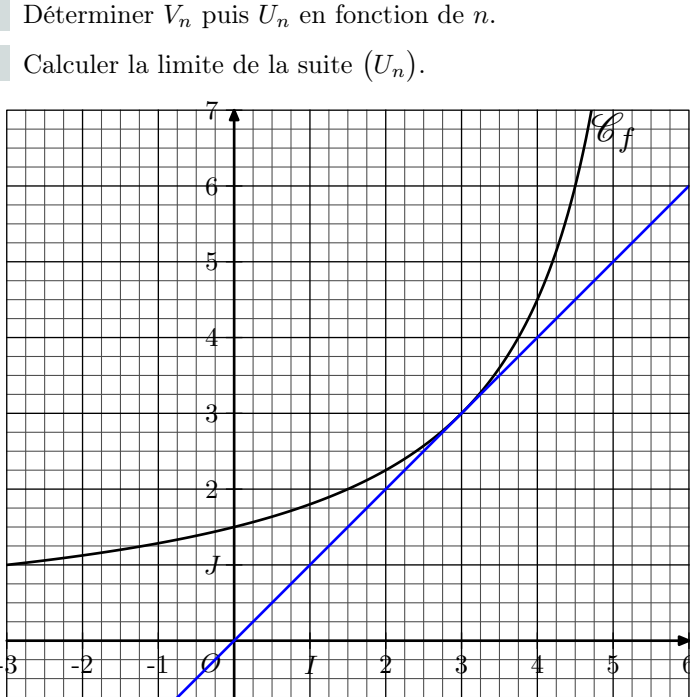
- Que peut-on déduire des questions **2. a.** et **2. b.** ?

- On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .

- Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

- Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .

- Calculer la limite de la suite (U_n) .



H. Equations différentielles:

Exercice H.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{-3x}$$

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x}$$
est solution de (E') .
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -3e^{-3x}$$
est solution de l'équation (E) .
4. En remarquant que $f=g+h$, montrer que f est une solution de (E) .

Exercice H.2

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (20x + 10) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E) , définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
 - a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E) , définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$$
 - b. Résoudre l'équation différentielle (E') .
 - c. Conclure.

Exercice H.3

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

- a. $y' = -3y$
- b. $y' - y = 0$
- c. $5y' - 2y = 0$
- d. $y = -3y'$

Exercice H.4

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

- a. $y' - 3y = 0$; $f(0) = 2$
- b. $2y' + 3y = 0$; $f(0) = -1$
- c. $3y' - 2y = 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$
- d. $y - 3y' = 0$; $f(6) = e^3$

Exercice H.5

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E)$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x \cdot e^{2x}$$
est une solution de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 0 \quad (E_0)$$
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) .
5. Déterminer la fonction, solution de (E) , qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Etude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit la

fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 1) \cdot e^{2x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x .

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0,2; 0,3]$.
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à $[0; 0,3]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.

Exercice H.6

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' = 2y + \cos x$$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ soit une solution f_0 de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) : y' = 2y$.
3. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_0) .
4. En déduire les solutions de (E) .
5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Exercice H.7

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x .

On pose $x=0$ en 2005, $g(0)=1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = \frac{1}{20} \cdot y \cdot (10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$

- a. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' = -\frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{20}$$

- b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E) .

2. Montrer que g est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$$

3. Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Exercice H.8

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) : x \cdot f'(x) - (2x + 1) \cdot f(x) = 8 \cdot x^2$$

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y' = 2 \cdot y + 8$$

- b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = x \cdot h(x)$ est solution de (E) .

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E) .

Exercice H.9

Partie A : une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-3x} \varphi(x)$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \frac{e}{2}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1 + e^{-3x}}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f .

2. Tracer $\mathcal{C}$.

3. Pour α réel non nul, on pose : $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x) dx$

- a. Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α .

- b. Exprimer I_α en fonction de α .

- c. Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C : étude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par : $u_n = \int_0^1 f(x) \cdot e^{\frac{x}{n}} dx$

où f est la fonction définie dans la **partie B**.

On ne cherchera pas à calculer u_n .

1. a. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de u_n .

- b. Donner le sens de variation de la suite (u_n) .

- c. La suite (u_n) est-elle convergente ?

2. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{n}} \cdot I_1$$

où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) . Donner sa valeur exacte.

Exercice H.10

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ vérifiant pour tout nombre réel x strictement positif :

$$x f'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$g'(x) = e^{2x}$$

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e}{2} x$$

Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x , le signe de $h(x)$.

Exercice H.11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-2x} \cdot \ln(1 + 2 \cdot e^x)$$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2 \cdot y = 2 \cdot \frac{e^{-x}}{1 + 2 \cdot e^x}$$

1. Vérifier que la fonction f est solution de (E) .

2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E') : y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

Exercice H.12

On appelle (E) l'équation différentielle :

$$y'' - y = 0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h , définie par $h(x) = e^{r \cdot x}$, soit solution de (E) .

2. Vérifier que les fonction φ définies par $\varphi(x) = \alpha \cdot e^x + \beta \cdot e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E) . On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E) .

3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

Exercice H.13

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) : \begin{cases} f(-x) \cdot f'(x) = 1 \text{ pour tout nombre réel } x \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x)f(x)$$
 - a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
 - b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g .
 - c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
 - d. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Question de cours

- a. On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.
- b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 et 0 .
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser qu'elle est cette fonction.

Exercice H.14

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A :

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x \cdot e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle :
 $(E) : y' + y = 0$
 Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B :

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_k(x) = (x + k) \cdot e^{-x}$$

où k est un nombre réel donné. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les nombres des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
 - la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
 - la courbe $\mathcal{C}_k$ d'équation $y = (x + k) \cdot e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.
 - a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).
 - b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^2 (x + 2) \cdot e^{-x} dx.$$
 Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice H.15

1. Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.
 On suppose connu le résultat suivant :
 La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$. Soit a un réel donné.
 - a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a \cdot y$.
 - b. Soit g une solution de l'équation $y' = a \cdot y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) \cdot e^{-a \cdot x}$. Montrer que h est une fonction constante.
 - c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a \cdot y$.
2. On considère l'équation différentielle :
 $(E) : y' = 2y + \cos x.$
 - a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$$
 soit une solution f_0 de (E).
 - b. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.
 - c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0) .
 - d. En déduire les solutions de (E).
 - e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice H.16

1. Résoudre l'équation différentielle : $2 \cdot y' + y = 0$ (E)
 dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :

$$2 \cdot y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x + 1) \quad (E')$$
 - a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot (m \cdot x^2 + p \cdot x)$$
 soit solution de (E')
 - b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 Montrer que g est solution de l'équation (E') si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation (E).
 Résoudre l'équation (E').
3. Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + 2x).$$
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h .

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction :

$$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$$
 - a. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ .
 - b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

I. Probabilité:

Exercice I.1

On compose au hasard un mot de trois lettres avec les lettres A , B , C :

1. Combien de mots peut-on construire ?
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous :
 - a. A : “Le mot commence par la lettre C ” ;
 - b. B : “Le mot commence et termine par la lettre A ” ;
 - c. C : “Le mot contient exactement deux fois la lettre B ” ;
 - d. D : “Le mot ne contient que des A ” ;
 - e. E : “Le mot est formé exactement de deux lettres distinctes” ;

Exercice I.2

On considère un jeu de carte 32 cartes et les trois événements suivants :

- A : “La carte tirée est un coeur”
- B : “La carte tirée est une figure”
- C : “La carte tirée est un nombre dont la valeur est comprise strictement entre 7 et 10”

1. On tire une carte au hasard dans le jeu de cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| a. A | b. B | c. C |
| d. $A \cap B$ | e. $A \cup B$ | f. $A \cup C$ |

2. La carte “Roi de coeur” a été retirée du jeu, puis on tire au hasard une carte. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- | | | |
|--------|--------|--------|
| a. A | b. B | c. C |
|--------|--------|--------|

Exercice I.3

Pour chaque question, comparer, si possible, la probabilité des deux événements présentés :

1. En jetant deux dés à six faces simultanément :
 - A : “La somme des dés vaut 2” ;
 - B : “La somme des dés vaut 3”.
2. On jette successivement deux dés à six faces :
 - C : “On obtient 1, puis 1” ;
 - D : “On obtient 1, puis 2”.
3. On considère une classe de 24 élèves :
 - E : “L’élève choisit est un garçon et pratique le football” ;
 - F : “Parmi les garçons, l’élève choisit pratique le football”.

Exercice I.4

On lance deux dés équilibrés. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous :

1. Événement A : “on obtient un 6 et un 2” ;
2. Événement B : “la somme obtenu est strictement supérieure à 8” ;
3. Événement C : “les deux nombres obtenus sont pairs”.

Exercice I.5

On dispose de deux dès numérotés de six faces lancés simultanément :

1. On considère les deux événements suivants :
 - A : “On obtient un double 1” ;
 - B : “On obtient un 1 et un 2”.

Justifier la valeur des probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{36} \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = \frac{1}{18}$$

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- | |
|---|
| a. C : “La somme des deux chiffres est égale à 5” ; |
| b. D : “La somme des deux chiffres est supérieure ou égale à 8” ; |
| c. E : “Les deux chiffres sont impairs”. |

Exercice I.6

On considère une expérience aléatoire simulant une situation d’équiprobabilité sur un univers Ω composé de 11 événements élémentaires.

On considère les deux événements A et B tels que :

- A est composé de 4 événements élémentaires ;
- B est composé de 8 événements élémentaires ;
- $A \cup B$ est composé de 10 événements élémentaires ;

1.
 - a. Faire un schéma réalisant cette situation.
 - b. De combien d’éléments élémentaires sont composés l’événement $A \cap B$.

2. En déduire les probabilités suivantes :

- | | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|
| a. $\mathcal{P}(A)$ | b. $\mathcal{P}(B)$ | c. $\mathcal{P}(A \cap B)$ | d. $\mathcal{P}(A \cup B)$ |
|---------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|

3. Quelles relations peut-on mettre en évidence entre les probabilités des événements A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice I.7

En fin d’année l’association des élèves d’un lycée organise une tombola. 100 tickets sont mis en vente à 10 euros l’unité.

Voici les différents tickets gagnants :

- 2 tickets gagnent 50 € ;
- 10 tickets gagnent 20 € ;
- 20 tickets gagnent 10 €.

1. Quelle est la somme des gains de cette tombola ?

2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- A : “le ticket ne gagne rien” ;
- B : “le ticket gagne 10 €” ;
- C : “le ticket gagne plus de 20 €” ;
- D : “le ticket gagne plus de 50 €” ;

3. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque ticket la valeur du ticket gagnant :

- a. Déterminer l’espérance $E(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- b. Déterminer la variance $V(\mathcal{X})$ et l’écart type $\sigma(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice I.8

En fin d’année l’association des élèves d’un lycée organise une tombola. 100 tickets à 10 euros chacun sont mis en vente.

Voici les différents tickets gagnants :

- 2 tickets gagnent 100 € ;
 - 15 tickets gagnent 20 € ;
- Déterminer les probabilités des événements suivants :
 - A : “le ticket ne gagne rien” ;
 - B : “le ticket gagne 20 €” ;
 - C : “le ticket gagne au moins 20 €” ;
 - Quelle est la somme des gains dans cette tombola ?
 - Quel est le bénéfice réalisé par les organisateurs de la tombola ?
 - On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque ticket la valeur du ticket gagnant :
 - Déterminer l’espérance $E(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
 - Déterminer la variance $V(\mathcal{X})$ et $\sigma(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice I.9

Dans un jeu basé sur une expérience aléatoire, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ mesure le gain réalisé par le participant. Le tableau suivant présente la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$:

x	0	1	2	3	6
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x)$	0,34	0,3	0,19	0,15	0,02

- Déterminer les probabilités suivantes :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X}<3)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geq 3)$; $\mathcal{P}(2\leq \mathcal{X}<5)$
- Déterminer l’espérance de cette variable aléatoire.

Exercice I.10

Un jeu consiste à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes. On associe à chaque carte un gain :

- Le Roi de Coeur rapporte 5 €.
- Une autre figure de Coeur rapporte 3 €.
- Une autre figure rapporte 1 €.
- Les autres cartes ne font pas gagner.

On modélise le gain de ce jeu par la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- Déterminer la valeur exacte de l’espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
 - Si la mise d’une partie est de 1 €, ce jeu est-il favorable ou défavorable à l’organisateur.
- Déterminer la variance et l’écart type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ arrondie au centième près.

Exercice I.11

On dispose de deux urnes A et B contenant chacune des boules indiscernables au toucher. Voici la composition des urnes :

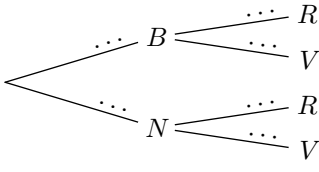
- Urne A : trois boules noires et deux boules blanches ;
- Urne B : cinq boules rouges et deux boules vertes.

On tire successivement une boule dans chacune des urnes.

On considère les événements suivants :

- B : “la boule tirée est blanche” ;
- N : “la boule tirée est noire” ;
- R : “la boule tirée est rouge” ;
- V : “la boule tirée est verte”.

- Compléter l’arbre de probabilité ci-dessous :



- Déterminer la valeur des probabilités suivantes :
 - $\mathcal{P}(B\cap R)$
 - $\mathcal{P}(B\cap V)$
 - $\mathcal{P}(N\cap R)$
- Donner la valeur de : $\mathcal{P}(B\cap R)+\mathcal{P}(N\cap R)$.
 - Que remarque-t-on ?

Exercice I.12

Un touriste se rend pour deux journées sur la cote pacifique du Mexique dans la localité de “Faro de Bucerias”. Sur le chemin de la plage, deux chemins sont proposés pour se rendre aux plages de “Maruata” et “Playa Ventura”.

Le premier jour, le touriste choisit au hasard une des deux plages.

Le second jour, il changera de plage avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité que le touriste soit allé au moins une fois sur la plage “Playa Ventura”.

Exercice I.13

Une fabrique de chocolats construit dans l’année des boîtes de chocolats dont 50 % avec du chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs.

70 % des boîtes présentent des chocolats naturels alors que les autres boîtes contiennent des chocolats sont fourrés de caramel. Ces proportions sont indépendantes du chocolat utilisé pour confectionner la boîte.

On considère les événements :

- L : “le chocolat au lait est utilisé” ;
- N : “le chocolat noir est utilisé” ;
- B : “le chocolat blanc est utilisé” ;
- Na : “les chocolats sont naturels” ;
- C : “les chocolats sont fourrés au caramel” ;

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

- Dresser l’arbre pondéré associé à cette situation.
- On choisit en sortie d’usine, au hasard, une boîte produite. Déterminer les probabilités des événements suivants :
 - “la boîte contient des chocolats noir et nature”
 - “la boîte contient des chocolats noir ou nature”
- L’entreprise fixe les prix des boîtes de la manière suivante :
 - le prix de base d’une boîte de chocolat est de 9 € ;
 - si le chocolat utilisé est le chocolat noir alors le prix est majoré de 4 € ;
 - si le chocolat utilisé est le chocolat blanc alors le prix est majoré de 2 € ;
 - si les chocolats sont fourrés au caramel, le prix de la boîte augmente de 2 €.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ associe à boîte produit par l’usine son

prix de vente.

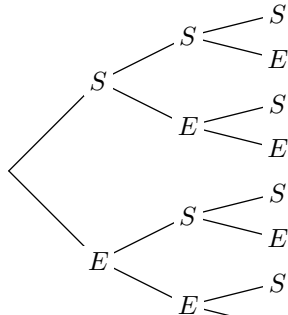
- Dresser le tableau représentant la loi de probabilité associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice I.14

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommée “succès” et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommée “échec” et notée E .

On décide de répéter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.

On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.

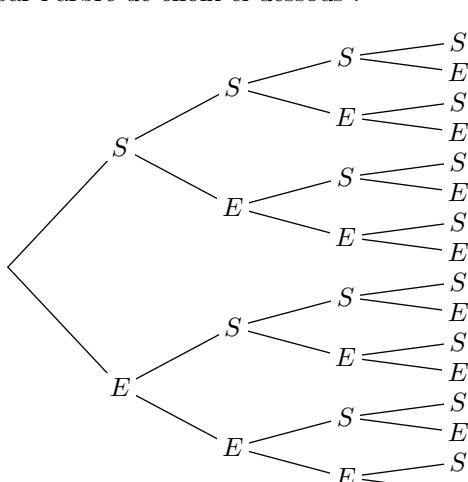


- Compléter cet arbre de probabilité ?
- Combien de chemins comportent 3 succès ?
 - Donner la probabilité d'obtenir trois succès à l'issue de cette expérience aléatoire ?
- Combien de chemins comportent 0 succès ?
 - Donner la probabilité de n'obtenir aucun succès à l'issue de cette expérience aléatoire ?
- Combien de chemins comportent 2 succès ?
 - Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succès à l'issue de cette expérience aléatoire ?

Exercice I.15

On considère une épreuve comportant que deux issues : une issue de probabilité 0,3 noté S ; l'autre issue est notée E .

On considère l'expérience aléatoire composée de quatre répétitions de l'épreuve précédente. Cette nouvelle expérience aléatoire est représentée par l'arbre de choix ci-dessous :



- Combien d'événements élémentaires composent cette expérience aléatoire ?
- On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque événement élémentaire, compte le nombre d'événements S réalisés.

Déterminer les probabilités suivantes arrondies au millièm :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

Exercice I.16

- Reconstruire le triangle de Pascal jusqu'à $n=7$.
- A l'aide du tableau de la question 1., donner les valeurs des coefficients binomiaux suivant :
 - $\binom{5}{3}$
 - $\binom{4}{0}$
 - $\binom{4}{2}$
 - $\binom{7}{5}$
- A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :
 - $\binom{5}{3}$
 - $\binom{12}{5}$
 - $\binom{8}{6}$
 - $\binom{7}{2}$

Exercice I.17

Un urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence)

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Proposition : La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est : $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$

Exercice I.18

Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au dixième.

Exercice I.19

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b .

2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b .

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : “la montre tirée présente le défaut a ” ;
- B : “la montre tirée présente le défaut b ” ;
- C : “la montre tirée ne présente aucun des deux défauts” ;
- D : “la montre tirée présente un et un seul des deux défauts”.

La probabilité de l'événement C est égale à 0,882.

- Calculer la probabilité de l'événement D .
- Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.

On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b .

On définit l'événement :

E : “quatre montres au moins n'ont aucun défaut”.

Calculer la probabilité de l'événement E . On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice I.20

Dans un établissement scolaire deux associations proposent des ac-

- tivités para-scolaire aux élèves : l'association sportive et l'association artistique, une étude a portée sur l'inscription des élèves à chacune de ces deux associations. Voici une partie de ses résultats :
- 42 % des élèves se sont inscrits à l'association sportive ;
 - 35 % des élèves se sont inscrits à l'association artistique ;
 - 32 % des élèves possèdent une inscription aux deux associations.
- On choisit au hasard un élève dans l'établissement. On considère les évènements suivants :
 - S : “l'élève est inscrit à l'association sportive” ;
 - A : “l'élève est inscrit à l'association artistique” ;
 - D'après les données de l'énoncé, donner la valeur des probabilités suivantes :
 $\mathcal{P}(S)$; $\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(S \cap A)$
 - Déterminer la probabilité de l'évènement :
 U : “L'élève est inscrit dans au moins une des deux associations”
 - On considère l'évènement :
 E : “L'élève est inscrit dans une et une seule de ces deux associations”.
 Montrer que la probabilité de cet évènement vérifie :
 $\mathcal{P}(E) = 0,13$
 - On forme des groupes de 32 élèves de cet établissement. On suppose que le choix des élèves s'effectue indépendamment des élèves précédemment choisis et ne modifie pas la probabilité du groupe.

 On s'intéresse à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre d'élèves d'un tel groupe possédant l'inscription à une et une seule de ces associations.
 - Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
 - Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves de ce groupe qui aient une et une seule inscription dans une de ces deux associations.

Exercice I.21

- Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
- Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p .
- Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
- Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i -ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :
- $$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \dots + \mathcal{X}_{40}$$
- Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
 - Dans cette partie, on suppose que $p = \frac{1}{20}$.
 - Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$.
 - Calculer les probabilités :
 $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$
 - Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

Exercice I.22

- Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.
- Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
- Une somme de 1 crédit (*la monnaie locale*) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.
- Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.
- Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Evidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^e groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédit à l'association.
- Les probabilités demandées seront arrondies au 100^e le plus proche.
- Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est à dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?
 - Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.
 Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.
 - Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

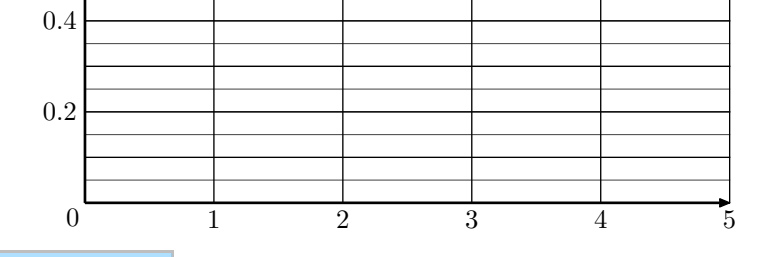
$$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{13}{k} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} \right) - 2 \cdot P_{13}$$
 Calculer ce gain.
 - La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

Exercice I.23

- On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,5$.

 Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- On considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suivant une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,3$.

 Dresser le tableau présentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.
- Dans le repère ci-dessous, placer les points :
 $(k ; \mathcal{P}(\mathcal{X}=k))$ et $(k ; \mathcal{P}(\mathcal{Y}=k))$
 pour k allant de 0 à 5.



Exercice I.24

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : “Pierre gagne la n -ième partie”.
- P_n : “Pierre perd la n -ième partie”.

On pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n)$ et $q_n = \mathcal{P}(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.

- a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathcal{P}_{P_1}(G_2)$.
- b. Justifier l'égalité : $p_n + q_n = 1$.
- c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$p_{n+1} = 0,5 \cdot p_n + 0,2.$$

2. Etude de la suite (p_n) .

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$.

- a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
- b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice I.25

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

- 1. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?
- 2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millièm.

Exercice I.26

Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles :

à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent “non cycliste”. Donner également la valeur approchée au millièm de cette probabilité.

Exercice I.27

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes de thé vert chez un grossiste. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

Une étude réalisée sur les boîtes de thé vert du grossiste montre que 12 % des boîtes présentent des traces de pesticides dans leur thé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

- 1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides. On donner la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-4} .
- 3. Donner, au millièm près, la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

J. Probabilité conditionnelle:

Exercice J.1

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

- 1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.
- 2. Déterminer les probabilités suivantes :

- a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2)$
- b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} < 2)$
- c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\} \cup \{\mathcal{X}=3\})$

Exercice J.2

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

On considère les évènements suivants :

- A : “La chaudière est garantie” ;
- B : “La chaudière est défectueuse”.

Voici la probabilité de certains éléments :

E	A	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
$\mathcal{P}(E)$	0,2	0,08	0,72

Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.

Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$ et son espérance mathématique.

Exercice J.3

Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10€ si le dé marque 1. Il gagne 1€ si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- 1. Sans l'usage de la calculatrice, donner la valeur exacte de la variance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- 2. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ arrondie au centièm près.

Exercice J.4

Une urne contient 50 boules blanches, 25 boules noires et 25 boules rouges. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les

boules ont toutes la même probabilité d’être tirées. On effectue 3 tirages indépendants et avec remise.

- Déterminer la probabilité de l’évènement :
 A : “les trois boules tirées sont blanches”.
- Déterminer la probabilité de l’évènement :
 B : “aucune des boules tirées est blanches”.
- Déterminer la probabilité de l’évènement :
 C_1 : “La première boule tirée est blanche ; les deux autres ne sont pas blanches”.
 - En déduire la probabilité de l’évènement :
 C : “une seule des boules tirées est blanches”.
- En déduire la probabilité de l’évènement :
 D : “deux boules tirées sont blanches et une boule n’est pas blanche”.
- Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées :
 - Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
 - Déterminer l’espérance de la variable $\mathcal{X}$.

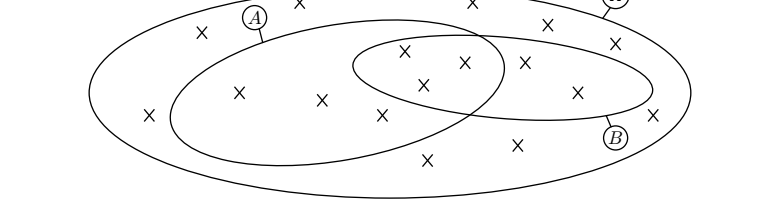
Exercice J.5

Un jeu consiste à lancer 3 fois un dé équilibré. On suppose les différents lancers. Les différents lancers sont indépendants et assimilable à des tirages avec remises.

- On considère l’évènement :
 A : “Le joueur réalise trois fois le nombre 6”.
Déterminer la probabilité de cet évènement.
 - On considère la probabilité de l’évènement :
 B : “Le joueur réalise deux fois le nombre 6”
- La mise de ce jeu est fixé à 3 euros. Chaque gagnant remporte :
 - 500 euros lorsque le joueur fait trois fois le nombre 6.
 - 5 euros lorsque le joueur fait deux fois le nombre 6.On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée au gain d’une partie ; le gain est la différence de la somme gagnée par la mise.
 - Dans un tableau, donner la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$.
 - Déterminer l’espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice J.6

On considère un ensemble Ω et deux de ses parties A et B représentés ci-dessous et dont les éléments sont représentés par des croix :

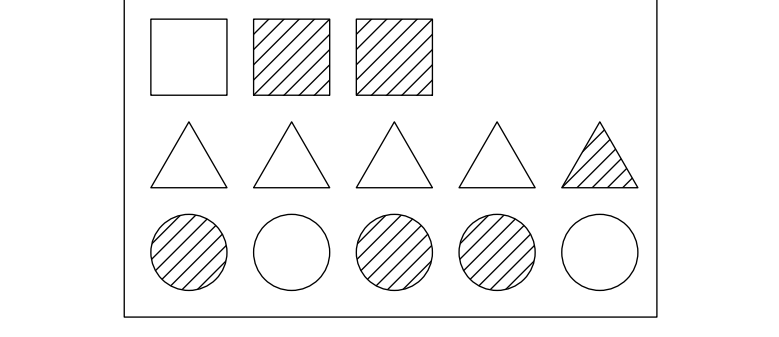


De manière équiprobable, on choisit un élément au hasard.

- Quelle est la probabilité que l’élément tiré appartiennent à A ?
 - Sachant qu’on a tiré un élément de B , quelle est la probabilité que cet élément appartiennent à A ?
- Déterminer les probailité suivantes :
 $\mathcal{P}(B)$; $\mathcal{P}(A \cap B)$
 - Donner la valeur du quotient $\frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$.
Que remarque-t-on ?

Exercice J.7

Un jeu consiste à secouer et renverser une bouteille afin d’en sortir un de ses éléments. Voici le contenu de cette bouteille :



- Déterminer la probabilité des évènements suivants :
 - A : “L’élément sorti est un carré” ;
 - B : “L’élément sorti est rayé” ;
 - $A \cap B$: “L’élément sorti est un carré rayé”.
- Sachant qu’un carré est sorti, quelle est la probabilité pour qu’il soit rayé ? On note cette probabilité $\mathcal{P}_A(B)$
 - Vérifier l’égalité suivante : $\mathcal{P}_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)}$
- Sachant que l’élément sorti est rayé, quelle est la probabilité pour que ce soit un carré ? On note cette probabilité $\mathcal{P}_B(A)$
 - Vérifier l’égalité suivante : $\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$

Exercice J.8

La scène se passe en haut d’une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu’entre deux plages, l’une à l’Est et l’autre à l’Ouest.

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l’une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu’il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $t=1$ ou $t=2$, on note E_i l’évènement : “Le touriste se dirige vers l’Est le t -ème jour” et O_i l’évènement : “Le touriste se dirige vers l’Ouest le t -ème jour”.

- Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
- Déterminer les probabilités suivantes :
 $\mathcal{P}(E_1)$; $\mathcal{P}_{E_1}(O_2)$; $\mathcal{P}(E_1 \cap E_2)$.
- Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage deux jours consécutifs.

Exercice J.9

Dans un espace probabilisé, on considère les deux évènements A et B vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}(A) = 0,64 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,3 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0,5$$

- Construire un arbre de probabilité représentant cette situation.
- Déterminer les probabilités des évènements suivants : $\mathcal{P}(A \cap B)$; $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)$
 - A l’aide de la formule des probabilités totale, déterminer la probabilitéde l’évènement B .

Exercice J.10

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve qui vérifient :

$$\mathcal{P}(A) = 0,4 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0,7 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,1$$

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Affirmation : La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé à $\frac{14}{41}$

Exercice J.11

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :

- S'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A ;
- Sinon il tire au hasard une boule de l'urne B .

1. Soit R l'évènement "*le joueur obtient une boule rouge*".
Montrer que $\mathcal{P}(R)=0,15$
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (*c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve les urnes retrouvent leur composition initiale*).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4 .

1. Déterminer la loi de probabilité de G .
2. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x .
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) \geq 0$

Exercice J.12

Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$$\mathcal{P}(A) = 0,3 \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup B) = 0,35.$$

Déterminer la probabilité de l'évènement B .

Exercice J.13

Soient A , B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathcal{P}$. On sait que :

- A et B sont indépendants ;
- $\mathcal{P}(A) = \frac{2}{5} \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$
- $\mathcal{P}(C) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cap C) = \frac{1}{10}$

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** $\mathcal{P}(B) = \frac{7}{12}$
- **Proposition 2 :** $\mathcal{P}(\overline{A \cup C}) = \frac{2}{5}$
 $\overline{A \cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A \cup C$.

Exercice J.14

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

- A : "*On obtient des boules des deux couleurs*";
- B : "*On obtient au plus une blanche*".

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement : "*Toutes les boules tirées sont de même couleur*".
b. Calculer la probabilité de l'évènement : "*On obtient exactement une boule blanche*".
c. En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :
$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$
2. Montrer que $P(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si :
 $2^{n-1} = n + 1$
3. Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_n = 2^{n-1} - (n + 1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 2.$$

Calculer u_2 , u_3 , u_4 .
Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice J.15

On lance un dé tétraédrique dont les quatres faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.

On lit le nombre sur la face cachée.

Pour $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, on note p_i la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.

Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1 , p_2 , p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique :

1. Sachant que $p_4 = 0,4$ démontrer que :
$$p_1 = 0,1 \quad ; \quad p_2 = 0,2 \quad ; \quad p_3 = 0,3$$
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
3. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
 - a. Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $[\mathcal{X} = i]$.
 - b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$. Interpréter le résultat obtenu.
 - c. Calculer la probabilité de l'évènement $[\mathcal{X} \geq 1]$. On donnera une valeur arrondie au millième.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.

On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n -ième lancer.
 - a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
 - b. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ puis étudier la convergence de la suite

$$(S_n).$$

- c. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 0,999$.

Exercice J.16

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir : sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : "l'animal est porteur de la maladie" ;
- T l'évènement : "le test est positif".

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

- a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
- b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

- a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?
- b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abatage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donné par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

- a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

- b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

K. Applications affines:

Exercice K.1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. Question de cours

On rappelle que : "Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z , on a :

$$|z| = \|\vec{w}\| \text{ et } \arg(z) = \left(\vec{u}; \vec{w} \right).$$

Soient M , N et P trois points du plan, d'affixes respectives m , n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

- a. Démontrer que : $\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right)$.

- b. Interpréter géométriquement le nombre $\left| \frac{p-m}{n-m} \right|$.

2. On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives :

$$z_1 = 4 + i \quad ; \quad z_B = 1 + i \quad ; \quad z_C = 5i \quad ; \quad z_D = -3 - i$$

Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$$

- a. Préciser les images des points A et B par f .

- b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe ω .

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z , on a :

$$z' - z = -2i(2 - i - z)$$

- b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω , la valeur de $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}\right)$.

- c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

- d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. Ecrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E .

Exercice K.2

Le complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{4}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z .

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f , dont on précisera l'affixe.

4. a. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

- b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r .

- c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $OP = 3$, et construire géométriquement son image P' par f .

5. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathcal{C}_1$, distinct de O , appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

Exercice K.3

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 3 cm)

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

- On considère les points A, B, C d'affixes respectives :
 $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 1$; $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f .
Placer les points A, B, C, A', B', C' .
- On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .
- Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
Tracer (D) . Quelle remarque peut-on faire ?
- Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f .
Montrer que M' appartient à la droite (D) .
- a. Montrer que, pour tout nombre complexe z :
$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}$$

En déduire que le nombre $\frac{z' - z}{z_A}$ est réel.
b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
- Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
Effectuer la construction sur la figure.

Exercice K.4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

Partie A

- a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .
b. Placer les points A, B et C .
- Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
- Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que :
 $|z| = |z - 2|$

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{-4}{z - 2}$

- a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z = \frac{-4}{z - 2}$.
b. En déduire les points associés aux points B et C .
c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB .
- a. **Question de cours :**
Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .
Démontrer que :
 - pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :
 $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
 - pour tout nombre complexe z non nul :
 $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
b. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 :
 $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$
c. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.
Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ .

Exercice K.5

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On appelle A le point d'affixe $-2i$. A tout point M du plan d'affixe z , on associe le point M' d'affixe :

$$z' = -2 \cdot \bar{z} + 2 \cdot i$$

- On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B . Placer ces points sur le dessin.
- Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ) .
- Démontrer que pour tout point M d'affixe z , on a :
 $|z' + 2 \cdot i| = 2 \cdot |z + 2 \cdot i|$

Exercice K.6

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; On note A le point d'affixe i .

Pour tout point M d'affixe z tel que $z \neq i$, on définit le point M' dont l'affixe z' est défini par :

$$z' = \frac{1}{3 \cdot (z - i)}$$

- Etablir la proposition suivante :
Si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors M' est un point du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3 \cdot r}$.
- Démontrer que : $\arg(z') = - \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM} \right)$

Exercice K.7

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) . On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{\bar{z} \cdot (z - 2)}{\bar{z} - 2}$$

- Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre complexe $(z - 2)(\bar{z} - 2)$ est réel.
- En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z' + 2}{z - 2}$ est réel.

3. Montrer, pour tout point M du plan, que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

Exercice K.8

A tout nombre complexe z tel que $z \neq 2$, on associe le nombre complexe z' définie par :

$$z' = \frac{z+3}{z-1}$$

1. On note $x+i \cdot y$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre complexe z .
Donner l'écriture algébrique du nombre z' , associé à z , en fonction de x et de y .

2. a. On considère l'équation cartésienne :
 $(E) : x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$
Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de (E) est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(-1; 0)$ et de rayon 2.

- b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre complexe z' associé soit un imaginaire pur.

Exercice K.9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$a = i \quad ; \quad b = 1 + i$$

On note :

- r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- r_O la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On considère :

- le point C d'affixe $c = 3 \cdot i$;
- le point D image de C par r_A ;
- le point G image de D par r_B ;
- le point H image de C par r_O .

On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H .

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h
3. Démontrer que le quadrilatère $CDGH$ est un rectangle.

Exercice K.10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (*unité graphique : 2 cm*)

1. a. Résoudre l'équation : $(E) : z^2 - 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$
b. On considère les nombres complexes :
 $z_1 = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} - i$
Et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.
c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2 \cdot \vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que $MNPQ$ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O , E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S . Montrer que S appartient au segment $[MN]$.
3. On pose $a = 2 - \sqrt{3}$:
a. Montrer que : $1 + a^2 = 4a \quad ; \quad 1 - a^2 = 2a\sqrt{3}$
b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de a .
c. Montrer que : $|Z| = |Z'| \quad ; \quad \frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
d. Dédire des questions précédentes la nature du triangle PRS

Exercice K.11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le point A de $(\mathcal{C})$ d'affixe :

$$z_A = e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. a. Justifier que $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC . Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.
b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2 .
a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h .
b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.
4. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.
a. Donner l'écriture complexe de h .
b. Calculer $z_A + z_B + z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.
c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle $(\mathcal{C})$?

Exercice K.12

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Ecrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
 $a = 2 \quad ; \quad b = 4 \quad ; \quad a' = 2i \quad ; \quad d = 2 + 2i$
Quelle est la nature du triangle ODB ?

4. Soient E et F les points d'affixes respectives :
 $e = 1 - i\sqrt{3}$; $f = 1 + i\sqrt{3}$
 Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?
5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A' et de rayon 2.
 Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
 - a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E . Calculer l'affixe e' du point E' .
 - b. Démontrer que le point E' est un point du cercle $\mathcal{C}'$.
 - c. Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$.
 En déduire que les points E , E' et D sont alignés.
6. Soit D' l'image du point D par la rotation r . Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

Exercice K.13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique : 4 cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2.
 - a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$.
 - b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$. Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ) .
3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$
 - a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.
 - b. Interpréter géométriquement l'argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ) .
4. On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N .
 - a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.
 - b. Déterminer l'affixe du point N .
5. On désigne par M' l'image du nombre complexe z' vérifiant la relation :

$$\frac{z' - z_B}{z_M - z_B} = -i$$
 - a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z' .
 - b. Quelle est la nature du triangle $MM'B$?
 - c. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ') .

L. Similitudes:

Exercice L.1

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère le point M du plan d'affixe z . Pour chaque question, on associe au point M un point M' dont l'affixe z' est définie en fonction de z .

Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune de ces applications :

- a. $z' = z - 1 + 2i$
- b. $z' = 2z + 3 - 2i$
- c. $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot z + 1 + i$

Exercice L.2

Dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les trois similitudes du plan :

- h est l'homothétie de centre A d'affixe $1 + i$ et de rapport 2 ;
- t est la translation dont le vecteur a pour affixe $-1 + 2i$;
- r est la rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre B d'affixe $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

1. Donner l'expression des applications complexes associés aux similitudes h , t et r .
2. Déterminer les expressions complexes des transformations :
 - a. $r \circ h$
 - b. $h \circ r$
 - c. $t \circ r$
 - d. $r \circ t$

3. On considère la rotation r' de centre C d'affixe 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 - a. Déterminer l'expression complexe de la transformation $r \circ r'$.
 - b. Donner les caractéristiques de la transformation $r \circ r'$.

Exercice L.3

Dans le complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère la similitude directe f d'écriture complexe :

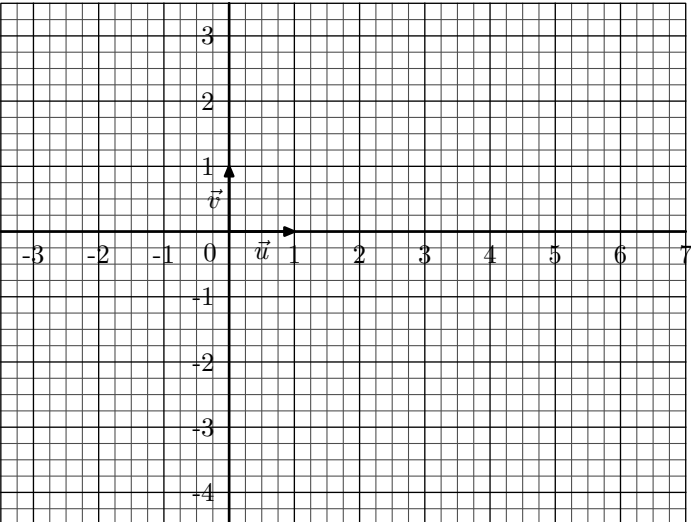
$$z \mapsto \frac{3}{2} \cdot (1 - i) \cdot z + 4 - 2i$$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie :

$f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice L.4

On considère le plan $(O; \vec{u}; \vec{v})$; soit A et A' les deux points du plan d'affixes respectives $\frac{1}{2} - i$ et $-3 + 2i$.



- Placer les points A et A' dans le repère ci-dessus.
- Déterminer le centre de l'homothétie h de rapport $\frac{1}{2}$ transformant le point A en A' .
 - Soit M un point du plan et z son affixe. On note M' l'image de M par h et z' son affixe. Montrer qu'on a la relation :

$$z' = 2 \cdot z - 4 + 4 \cdot i$$
 - Soit B et C les deux points d'affixes respectives $\frac{1}{2} - 2 \cdot i$ et $\frac{9}{2} - i$. Déterminer les affixes des points B' et C' images des points B et C par l'homothétie h .
Placer tous ces points sur le graphique.
- On considère le point D d'affixe 3. Soit h' l'homothétie de centre D d'affixe i et de rapport $-\frac{3}{2}$.
 - Donner l'expression complexe de la similitude h' .
 - Déterminer les affixes des images de A , B , C .
 - Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie h' .

Exercice L.5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A , B , C , M , N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + i \quad ; \quad b = -1 + 2 \cdot i \quad ; \quad c = 2 + 3 \cdot i$$

$$m = 7 - 5 \cdot i \quad ; \quad n = 5 - i \quad ; \quad p = 9 + i$$

- Placer les points A , B , C , M , N et P dans le repère.
 - Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP .
 - En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence la similitude directe qui transforme le triangle ABC en le triangle MNP .

- Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P .
 - Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5} \cdot i\right) \cdot z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5} \cdot i$$
 - Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s .
 - Vérifier que la similitude s transforme le point C en M .

Exercice L.6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points B , C et H d'affixes respectives :

$$b = 5 \cdot i \quad ; \quad c = 10 \quad ; \quad h = 2 + 4 \cdot i$$

Construire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

- Etude de la position du point H :
 - Démontrer que le point H appartient à la droite (BC) .
 - Calculer $\frac{h}{h-c}$, et en déduire que :

$$\left(\overrightarrow{HC}; \overrightarrow{HA}\right) = -\frac{\pi}{2} [2 \cdot \pi]$$
- Etude d'une première similitude :
 - Calculer les rapports : $\frac{BH}{AH}$; $\frac{BA}{AC}$; $\frac{AH}{CH}$
 - Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB .
 - Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

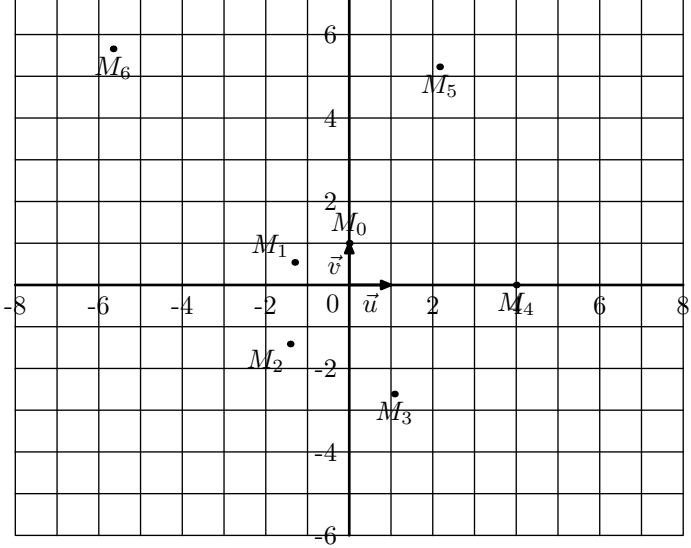
Exercice L.7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3 \cdot i \cdot \pi}{8}} \cdot z$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n . Les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée ci-dessous :



- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .
- On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .
 - En déduire que pour tout entier naturel n :

$$OM_{n+4} = 4 \cdot OM_n \quad ; \quad \left(\overrightarrow{OM_n}; \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\frac{\pi}{2} [2 \cdot \pi]$$
 - Compléter la figure en construisant les points M_4 , M_5 et M_6 .
- Démontrer que pour tout entier naturel :

$$z_n = (\sqrt{2})^n \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3 \cdot n \cdot \pi}{8}\right)}$$
- Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.
 - Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_p}; \overrightarrow{OM_n}\right)$.
 - Démontrer que les points O , M_p et M_n sont alignés si, et seulement si, $n-p$ est un multiple de 8.

Exercice L.8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot z \quad ; \quad z'' = e^{i \cdot \frac{\pi}{5}} \cdot z$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .
2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives :

$$a_0 = 2 \cdot e^{-2 \cdot i \cdot \frac{\pi}{3}} \quad ; \quad b_0 = 4 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{5}}$$
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \quad ; \quad B_{n+1} = g(B_n)$$
On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n .
 - a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?
 - b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.
3.
 - a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB_n}; \overrightarrow{OB_{n+2}}\right)$.
 - c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.
4. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

Exercice L.9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit A et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 + 5 \cdot i \quad ; \quad c = 1 + 4 \cdot i$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2 \cdot i) \cdot z + 1$

1. Soit M le point d'affixe $z = x + i \cdot y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f . Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x + 3 \cdot y = 2$
2. On considère l'équation $(E): x + 3 \cdot y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E) .
 - b. Résoudre l'équation (E) .
 - c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

Exercice L.10

Dans le plan complexe, on considère la fonction complexe f définie pour tout nombre z complexe par :

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot (1 + i) \cdot z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$$

On définit la suite (a_n) par les relations :

$$a_0 = 4 + 2 \cdot i \quad ; \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Pour tout entier n naturel, on définit le point A_n d'affixe a_n .

On considère la similitude $\mathcal{S}$ définie par la relation :

$$z = f(z)$$

1. Préciser la nature de $\mathcal{S}$ et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. En déduire la convergence de la suite (a_n) .

Exercice L.11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soient A , B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i \quad ; \quad z_B = 5 + 2 \cdot i \quad ; \quad z_C = i$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB) .

1. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' telle que :

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot i\right) \cdot \bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot i\right)$$
2. En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB) .
3. Démontrer que l'ensemble des points M' tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x + 3y = 1$
4. Vérifier que le point C' appartient à $(\mathcal{D})$.

Exercice L.12

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (*unité graphique : 4 cm*)

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point d'affixe $-\bar{z} + 2$.

1. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i \cdot \sqrt{3}$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T .
3. Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Exercice L.13

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les deux rectangles $OABC$ et $DEFG$ où les points A , B , C , D , E , F , G ont pour affixes respectives.

$$z_A = -2 \quad ; \quad z_B = -2 + i \quad ; \quad z_C = i \quad ; \quad z_D = 1$$

$$z_E = 1 + 3 \cdot i \quad ; \quad z_F = \frac{5}{2} + 3 \cdot i \quad ; \quad z_G = \frac{5}{2}$$

On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe :

$$z' = -\frac{2}{3} \cdot i \cdot \bar{z} + \frac{5}{3} \cdot i$$

1. Déterminer l'image du rectangle $DEFG$ par la similitude s' .
2. On considère la similitude $g = s' \circ s$. Déterminer l'image du rectangle $OABC$ par la similitude g .
3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non-fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La similitude g a-t-elle des points fixes? Que peut-on en conclure pour g ?

Exercice L.14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) z + 1$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ .
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

- Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 .
 - Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$
 - A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
- Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
 - Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice L.15

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie

$ABCD$ est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré $ABCD$. Soit J le milieu du segment $[CD]$.

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J .

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s . Dans la partie A, on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B, on utilisera les nombres complexes.

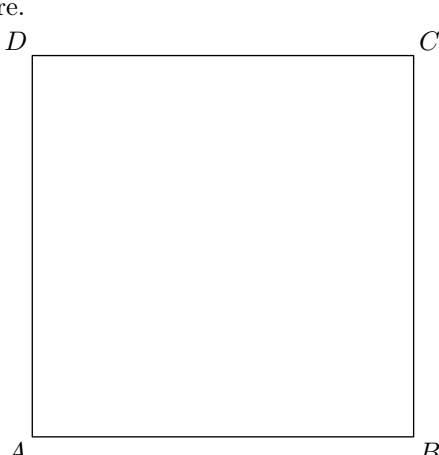
Partie A

- Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .
- On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 . Placer Ω sur la figure.
- Donner l'image par s de la droite (BC) . En déduire le point image par s du point C , puis le point K image de s du point I .
- On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle-même).
 - Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
 - Trouver l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2 + 2i$ et $2i$.

- Démontrer que l'écriture complexe de la similitude est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.
- Calculer l'affixe du point Ω .
- Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = 1$. Placer le point E sur la figure.



Exercice L.16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i\sqrt{3}) \cdot \bar{z}$$

où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

Soient les points A et B d'affixes respectives :

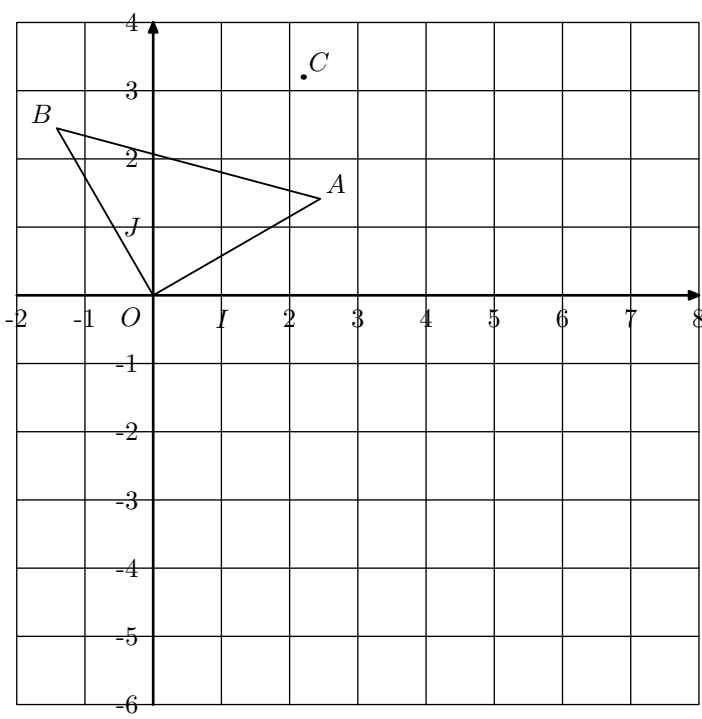
$$z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

On note A' et B' les images respectives des points A et B par f .

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

- Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
 - Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
 - En déduire la nature du triangle $OA'B'$.
 - Montrer que l'affixe $z'_{A'}$ de A' vérifie l'égalité :

$$z_{A'} = 2 \cdot z_A$$
 En déduire la construction de A' et B' .
- On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe $(O; \overrightarrow{u})$. On pose $g = r \circ s$.
 - Déterminer l'écriture complexe de la transformation g .
 - Montrer que les points O et A sont invariants par g .
 - En déduire la nature de la transformation g .
- Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
 - Sur la figure placée en ANNEXE, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f .



Exercice L.17

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

- On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe $1+i$. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB) .
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe :
$$z' = -i \cdot \bar{z} + 1 + i$$
- On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .
- On note f la composée $H \circ S$.
 - Montrer que f est une similitude.
 - Déterminer l'écriture complexe de f .
- On appelle M' l'image d'un point M par f .
 - Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = - \cdot \overrightarrow{AM}$ est la droite (AB) .
 - Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = \cdot \overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB) .

Exercice L.18

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Unité graphique : 4 cm.

Partie I

- Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'abscisses respectives :
$$z_I = 1 \qquad ; \qquad z_J = i \qquad ; \qquad z_H = 1 + i$$

$$z_A = 2 \qquad ; \qquad z_B = \frac{3}{2} + i \qquad ; \qquad z_C = 2i$$

$$z_D = -1$$
- Soit E le symétrique de B par rapport à H . La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F .

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe :
$$z_F = -1 + \frac{1}{2}i.$$
- Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

- $$z' = -i \cdot \bar{z} + 2i$$
- Déterminer les images des points O, A, B par f .
 - Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
 - Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
 - La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
 - Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1} .
 - On pose $s = f \circ t^{-1}$:
 - Montrer que l'écriture complexe de s est :
$$z' = -i \cdot \bar{z} + 1 + i$$
 - Montrer que I et J sont invariants par s . En déduire la nature de s .
 - En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Exercice L.19

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

- On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i . On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB) .
Montrer que l'image M' par S d'un point m d'affixe z a pour affixe :
$$z' = -i \cdot \bar{z} + 1 + i$$
- On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2 . Donner l'écriture complexe de H .
- On note f la composée $H \circ S$.
 - Montrer que f est une similitude.
 - Déterminer l'écriture complexe de f .
- On appelle M'' l'image d'un point M par f .
 - Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\overrightarrow{AM''} = -2 \cdot \overrightarrow{AM}$$
est la droite (AB) .
 - Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\overrightarrow{AM''} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$$
est la perpendiculaire en A à la droite (AB) .

Exercice L.20

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- On pose $\sigma = h \circ r$.
 - Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
 - Montrer que l'écriture complexe de σ est :
$$z \longmapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i$$
 - Soit M un point quelconque du plan d'affixe z . On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M' . Montrer que :
$$z - z' = i(2 - z')$$
- Question de cours**
● *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques modules et des arguments.*
Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a , alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = i(p - a)$.
 - Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω .
- Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :
$$\text{pour tout entier naturel } n : \quad A_{n+1} = \sigma(A_n).$$
 - Montrer que, pour tout entier naturel n , l'affixe a_n de A_n est donnée par :
$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i \frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$$
 - Déterminer l'affixe de A_5 .

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geq n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice L.21

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right) \cdot z + 1$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ .
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n , on pose :
 $A_{n+1} = f(A_n)$
 - a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 .
 - b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
 - c. A partir de quel rang n_0 , tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
3.
 - a. Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n , la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
 - b. Pour tout entier naturel n , on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$. On a ainsi :
 $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice L.22

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
 $z_A = 2 + i$; $z_B = 5 + 2i$, $z_C = i$
 s_1 désigne la symétrie d'axe (AB) .
 - a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot i\right) \cdot \bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot i\right)$$
 - b. En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB) .
 - c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :
 $4x + 3y = 1$
 - d. Vérifier que le point C appartient à $\mathcal{D}$.
2.
 - a. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω .
 - b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.
 - c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f .
 - d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.
3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.
 - a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation :
 $4x + 3y = 1$.
 - b. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.