

Ressources pédagogiques

Mathématiques

Terminale Sciences Expérimentales

Exercices d'application, d'approfondissement,
situations complexes (APC), devoirs et sujets type BAC

Almame TRAORÉ — Professeur de mathématiques (LBF – LPMT)

Sommaire — conforme au programme officiel de TS Exp (5 h/semaine, coefficient 3)

UA1 — Nombres complexes ; limites, dérivées, primitives

- Séquence 1.1 Nombres complexes : formes algébrique et trigonométrique, Moivre, racines n -ièmes, équations
- Séquence 1.2 Nombres complexes et géométrie : similitudes directes et indirectes
- Séquence 2 Limites et continuité ; valeurs intermédiaires, dichotomie, fonction réciproque
- Séquence 3 Dérivation : composée, réciproque, x^m , dérivée seconde, dérivées successives
- Séquence 4 Primitives

UA2 — Intégrale, études de fonctions, ln, exp, équations différentielles

- Séquence 1 Calcul intégral : aires, intégration par parties, méthode des rectangles
- Séquence 2.1 Études de fonctions : polynômes, rationnelles, trigonométriques ; asymptotes obliques
- Séquence 2.2 Fonction logarithme népérien et logarithme décimal
- Séquence 2.3 Fonction exponentielle et fonctions puissances
- Séquence 3 Équations différentielles $f' + kf = 0$ et $f'' + kf = 0$

UA3 — Suites, algèbre, dénombrement, statistique, probabilités

- Séquence 1 Suites numériques
- Séquence 2 Systèmes d'équations linéaires (tableau, pivot de Gauss)
- Séquence 3 Dénombrement
- Séquence 4 Statistique à deux caractères (Mayer, moindres carrés, corrélation)
- Séquence 5 Probabilités ; loi binomiale

Évaluations

- Devoirs Un devoir de synthèse de 2 h (sur 20) à la fin de chaque séquence
- BAC Trois sujets type BAC de 3 h (sur 20) couvrant tout le programme

Mode d'emploi

Chaque séquence comprend un encadré **L'essentiel à retenir**, des **exercices d'application** (niveau 1), des **exercices d'approfondissement** (niveau 2), deux **situations complexes** structurées selon l'APC (contexte, support, fonction, consignes) ancrées dans les réalités du Mali, des **exemples résolus** avec tableaux de variations et courbes, des **problèmes de synthèse**, puis un **devoir de synthèse de 2 heures** noté sur 20. Le livret se termine par **trois sujets type BAC de 3 heures** sur 20. Toutes les données ont été vérifiées.

Unité d'apprentissage 1

UA1

Nombres complexes · Similitudes · Limites et continuité · Dérivation · Primitives

Séquence 1

Nombres complexes

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Ensemble $\mathbb{C}$: bijection $(a, b) \mapsto a + bi$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, affixe d'un point, d'un vecteur ; somme, produit, quotient ; conjugué ; module et argument ; forme trigonométrique ; formule de Moivre ; racines n -ièmes ; équations du second degré dans $\mathbb{C}$; factorisation de polynômes et équations de degré 3 ou 4.

L'essentiel à retenir

- Tout complexe s'écrit de façon unique $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$) : $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Le point $M(a; b)$ a pour affixe z ; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Conjugué : $\bar{z} = a - bi$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Pour un quotient, on multiplie par le conjugué du dénominateur.
- Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$; $|zz'| = |z||z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $AB = |z_B - z_A|$.
- Argument ($z \neq 0$) : $\theta = \arg z$ tel que $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$, $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$ (à 2π près) ; $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$; $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$.
- Forme trigonométrique : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, notée aussi $re^{i\theta}$. **Moivre** : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.
- Racines n -ièmes de $Z = Re^{i\alpha}$ ($R > 0$) : $z_k = \sqrt[n]{R} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$; leurs images forment un polygone régulier à n côtés.
- $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) : $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\delta^2 = \Delta$, les solutions sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ (si $\Delta \in \mathbb{R}_*$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$).
- Si $P(z_0) = 0$, on factorise $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ (division ou identification).

Exercices d'application**Exercice 1** — Forme algébrique

On donne $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 1 - i$. Écris sous forme algébrique : $z_1 + z_2$; $z_1 z_2$; $\bar{z}_1$; z_1^2 ; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{1}{z_2}$.

Exercice 2 — Module et argument

Détermine le module et un argument, puis la forme trigonométrique de : $a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = -2 + 2i$; $c = -3i$; $d = \sqrt{3} - i$; $e = \frac{a}{d}$.

Exercice 3 — Formule de Moivre

- 1) Calcule $(1 + i)^8$ et $(1 + i\sqrt{3})^6$ à l'aide de la forme trigonométrique.
- 2) Développe $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ et déduis-en que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

Exercice 4 — Racines n -ièmes

- 1) Détermine les racines cubiques de $8i$ sous forme trigonométrique puis algébrique. Place leurs images dans le plan.
- 2) Détermine les racines quatrièmes de -16 .
- 3) Résous $z^6 = 1$ et montre que les images des solutions sont les sommets d'un hexagone régulier.

Exercice 5 — Équations du second degré

Résous dans $\mathbb{C}$: a) $z^2 - 2z + 5 = 0$; b) $z^2 + z + 1 = 0$; c) $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$ (vérifie que $(1 - 3i)^2 = -8 - 6i$).

Exercice 6 — Degrés 3 et 4

- 1) Soit $P(z) = z^3 - 3z^2 + 7z - 5$. Calcule $P(1)$, factorise $P(z)$ et résous $P(z) = 0$.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation bicarrée $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

Exercices d'approfondissement**Exercice 7** — Racine imaginaire pure

Soit $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$.

- 1) Montre que P admet une racine imaginaire pure bi ($b \in \mathbb{R}$) et détermine-la.
- 2) Factorise $P(z)$ et résous $P(z) = 0$.
- 3) On note A, B, C les images des solutions (A d'affixe i , B d'affixe $1 + i$, C d'affixe $1 - i$). Calcule AB , BC et AC ; quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 8 — Ensembles de points

Détermine et représente l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|z - 2i| = 3$; b) $|z - 1| = |z + i|$; c) $\frac{z - 1}{z + 1}$ est un réel ; d) $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Situations complexes**Situation complexe 1.1** Forme algébrique · module · argument**Le circuit du laboratoire du lycée****1 · Contexte**

Au laboratoire de physique d'un lycée de Bamako, les élèves montent un circuit RLC série alimenté par la tension du secteur (EDM). En électricité, on représente l'impédance par un nombre complexe.

2 · Support

Impédance du circuit : $Z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ avec $R = 30 \, \Omega$, $L\omega = 60 \, \Omega$, $\frac{1}{C\omega} = 20 \, \Omega$.

Tension efficace : $U = 220 \text{ V}$; intensité efficace : $I = \frac{U}{|Z|}$. Le déphasage φ est un argument de Z .

3 · Fonction

Tu es le responsable du groupe de TP. Tu dois calculer les grandeurs du circuit et vérifier la sécurité.

4 · Consignes

- ❶ Écris Z sous forme algébrique, puis calcule son module $|Z|$.
- ❷ Calcule l'intensité efficace I et une valeur approchée du déphasage φ en degrés.
- ❸ Le fusible du montage supporte 5 A. Dis si le montage est sûr, puis détermine la valeur de $L\omega$ pour laquelle Z est réel (résonance) et l'intensité correspondante. Conclus.

Situation complexe 1.2 Racines n -ièmes · forme trigonométrique

Le motif du bogolan

1 · Contexte

Une artisane de Ségou dessine un motif en étoile pour un bogolan. Elle veut placer six points régulièrement répartis sur un cercle.

2 · Support

Le centre du motif est l'origine d'un repère orthonormé (unité : 10 cm) ; les six points ont pour affixes les solutions de $z^6 = 64$. Le motif sera brodé en fil noir sur fond ocre.

3 · Fonction

Tu es l'apprenti de l'artisane. Tu dois calculer la position exacte des points et les dimensions du motif.

4 · Consignes

- ❶ Résous l'équation $z^6 = 64$ et donne les solutions sous forme algébrique.
- ❷ Place les six points et justifie qu'ils forment un hexagone régulier ; calcule son périmètre en centimètres.
- ❸ Calcule l'aire de l'hexagone en cm^2 .

Exemple résolu et figure

Exemple résolu — équation de degré 3 et nature d'un triangle

Énoncé. Soit $f(z) = z^3 - 6z + 20i$. Montre que f admet une racine imaginaire pure, résous $f(z) = 0$ et étudie le triangle formé par les images des solutions.

1. Racine imaginaire pure

On cherche $z_0 = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) : $f(bi) = -ib^3 - 6bi + 20i = i(-b^3 - 6b + 20)$. On résout $b^3 + 6b - 20 = 0$: $b = 2$ convient ($8 + 12 - 20 = 0$). Donc $z_0 = 2i$.

2. Factorisation et résolution

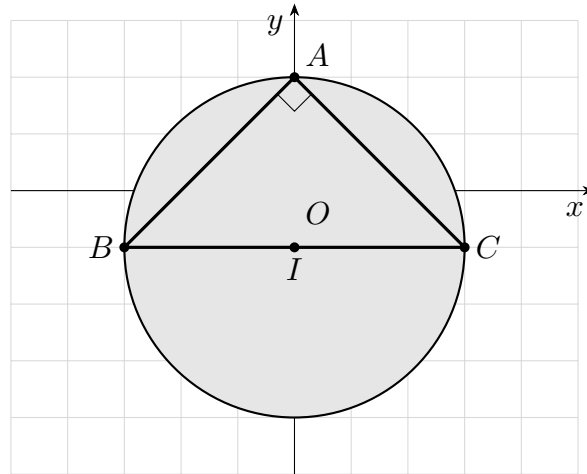
$f(z) = (z-2i)(z^2+2iz-10)$ (on vérifie en développant). Pour $z^2+2iz-10 = 0$: $\Delta = (2i)^2+40 = 36$, donc $z_1 = \frac{-2i-6}{2} = -3-i$ et $z_2 = \frac{-2i+6}{2} = 3-i$. Ainsi $S = \{2i; -3-i; 3-i\}$.

3. Nature du triangle

$A(2i)$, $B(-3-i)$, $C(3-i)$: $AB = |-3-3i| = 3\sqrt{2}$, $AC = |3-3i| = 3\sqrt{2}$, $BC = 6$. Comme $AB^2 + AC^2 = 36 = BC^2$ et $AB = AC$, le triangle ABC est **rectangle isocèle en A**.

4. Ensemble $BM^2 + CM^2 \leq 36$

Avec $I(-i)$ milieu de $[BC]$: $BM^2 + CM^2 = 2IM^2 + \frac{BC^2}{2} = 2IM^2 + 18$. La condition équivaut à $IM \leq 3$: c'est le **disque de centre I et de rayon 3**.

**Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)****Exercice 9** — Forme trigonométrique, Moivre, linéarisation

- 1) Écris sous forme trigonométrique $Z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $Z = \frac{Z_1}{Z_0}$.
- 2) Calcule $A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{36}$.
- 3) Linéarise $\cos^6 x$ (utilise $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et la formule du binôme).
- 4) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1 + i\sqrt{3}$; donne les solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 10 — Racine réelle et racine imaginaire

Soit $f(z) = z^3 - (1+i)z^2 - 4 + 4i$.

- 1) Vérifie que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle a et une solution imaginaire pure bi que tu détermineras.
- 2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$ (utilise la somme des racines ou une factorisation).
- 3) Calcule le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 11 — Valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

- 1) Linéarise $\cos^2 x \sin x$ et résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -i$.
- 2) Soient $a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$.
 - a) Calcule la partie réelle et la partie imaginaire de $q = \frac{b}{a}$.
 - b) Calcule le module et un argument de a , b et q .
 - c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 12 — Équation de degré 3 à coefficients complexes

Soit $f(z) = z^3 + (4 + 8i)z^2 + (-26 + 32i)z - 60 + 32i$.

- 1) Calcule $f(-2)$. Déduis-en $f(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ avec a, b, c complexes à déterminer.
- 2) Résous $f(z) = 0$ (vérifie que $(8 - 2i)^2 = 60 - 32i$). On note z_0 la solution réelle, z_1 celle de partie réelle positive et z_2 la troisième.
- 3) A, B, C ont pour affixes z_0, z_1, z_2 . Calcule le module et un argument de $U = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et déduis-en la nature du triangle ABC .

Exercice 13 — Forme trigonométrique et racines quatrièmes

- 1) Mets sous forme trigonométrique $T = \frac{-1 + i}{2}$, $Z = \frac{-1 - i}{2}$ et $U = \frac{T}{Z}$.
- 2) Linéarise $\sin^3 x$.
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$ (forme trigonométrique) et représente les images des solutions.

Devoir de synthèse — Séquence 1

Nombres complexes

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Forme algébriqueOn donne $z_1 = 3 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

- 1) Écris sous forme algébrique $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\bar{z}_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$. (3 pt)
- 2) Calcule $|z_1 z_2|$ de deux façons. (2 pt)

Exercice 2 (5 points) — Forme trigonométrique et racinesSoit $z = -1 + i\sqrt{3}$.

- 1) Détermine le module, un argument et la forme trigonométrique de z . (1,5 pt)
- 2) Calcule z^6 à l'aide de la formule de Moivre. (1,5 pt)
- 3) Détermine les racines cubiques de -8 et place leurs images. (2 pt)

Exercice 3 (10 points) — Équation de degré 3 et géométrieSoit $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i$.

- 1) Vérifie que $P(2i) = 0$. (1 pt)
- 2) Détermine les réels a et b tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$. (2 pt)
- 3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (2 pt)
- 4) On note A, B, C les points d'affixes $2i, 1 + i$ et $1 - i$. Place-les et calcule AB, BC et AC . (2 pt)
- 5) Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Que remarques-tu ? (1,5 pt)
- 6) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = |z - 1 - i|$. (1,5 pt)

Séquence 2

Nombres complexes et géométrie : similitudes

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Interprétation géométrique du module et de l'argument ; alignement, orthogonalité, nature d'un triangle ; écriture complexe des translations, homothéties et rotations ; similitudes directes et indirectes (rapport, angle, centre).

L'essentiel à retenir

- Pour trois points distincts A, B, C : $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB}$ et $\arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Si ce quotient est réel, A, B, C sont alignés ; s'il est imaginaire pur, $(AB) \perp (AC)$; s'il vaut $\pm i$, ABC est rectangle isocèle en A ; s'il vaut $e^{\pm i\pi/3}$, ABC est équilatéral.
- Translation de vecteur $\vec{u}(b)$: $z' = z + b$. Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k : $z' - \omega = k(z - \omega)$. Rotation de centre Ω et d'angle θ : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
- **Similitude directe** : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$). Si $a \neq 1$: centre $\omega = \frac{b}{1-a}$, rapport $|a|$, angle $\arg a$; elle s'écrit $z' - \omega = a(z - \omega)$. Elle conserve les angles orientés et multiplie les distances par $|a|$ (les aires par $|a|^2$).
- **Similitude indirecte** : $z' = a\bar{z} + b$ ($a \neq 0$) ; elle multiplie les distances par $|a|$ et change les angles orientés en leurs opposés. Exemple : $z' = \bar{z}$ est la symétrie d'axe (Ox) .
- Une similitude directe est déterminée par deux points distincts et leurs images.

Exercices d'application**Exercice 1** — Reconnaître une transformation

Donne la nature et les éléments caractéristiques de chaque transformation d'écriture complexe : a) $z' = z + 2 - i$; b) $z' = -2z + 3$; c) $z' = iz + 1 + i$; d) $z' = (1 + i)z + 2$; e) $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

Exercice 2 — Écriture complexe

Écris l'écriture complexe :

- 1) de la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- 2) de l'homothétie de centre $\Omega(2)$ et de rapport -3 ;
- 3) de la similitude directe de centre $\Omega(1 + i)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Calcule l'image du point O .

Exercice 3 — Nature d'un triangle

Soient $A(1 + i)$, $B(3 + 2i)$, $C(3i)$ et $D(2 - i)$.

- 1) Calcule $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et déduis-en la nature du triangle ABC .
- 2) Montre que les points A, B et $E(5 + 3i)$ sont alignés.

3) Calcule $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ et montre que $(AD) \perp (AB)$.

Exercice 4 — Similitude définie par deux points

Détermine la similitude directe S qui transforme $A(0)$ en $A'(1)$ et $B(1)$ en $B'(1+i)$. Précise ses éléments caractéristiques.

Exercice 5 — Similitudes indirectes

- 1) Montre que $z' = i\bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.
- 2) Soit f d'écriture $z' = 2\bar{z} + 1$. Calcule l'image du triangle $O, I(1), J(i)$ et compare les aires.

Exercices d'approfondissement

Exercice 6 — Composée et suite de points

Soit S la similitude directe d'écriture $z' = \frac{1+i}{2}z$.

- 1) Donne le centre, le rapport et l'angle de S .
- 2) On pose $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$. Exprime z_n sous forme trigonométrique et calcule $|z_n|$.
- 3) À partir de quel rang le point M_n est-il dans le disque de centre O et de rayon 0,01 ?

Exercice 7 — Carré construit par rotation

Soient $A(1)$ et $B(3+i)$. On construit le carré direct $ABCD$.

- 1) Utilise la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ pour calculer l'axe de C , puis celle de D .
- 2) Calcule l'axe du centre du carré et son aire.

Situations complexes

Situation complexe 2.1 Rotation · triangle équilatéral

L'emplacement des forages

1 · Contexte

Une ONG veut creuser deux forages pour deux villages du cercle de Koro, de façon que chaque forage soit à égale distance des deux villages et à la même distance que celle qui les sépare.

2 · Support

Dans un repère orthonormé (unité : 1 km), le village A a pour affixe 0 et le village B pour affixe 6. Chaque forage P doit former avec A et B un triangle équilatéral. Le chantier commence avant l'hivernage.

3 · Fonction

Tu es le topographe de l'ONG. Tu dois calculer les positions des forages.

4 · Consignes

- ❶ Écris l'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis celle de la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
- ❷ Déduis-en les affixes des deux emplacements possibles P_1 et P_2 des forages, sous forme algébrique.
- ❸ Calcule la distance entre les deux forages, au mètre près.

Situation complexe 2.2 Similitude directe · agrandissement**L'agrandissement du plan de la salle de classe****1 · Contexte**

Pour construire une nouvelle salle de classe, le comité de gestion scolaire d'un village de Kati utilise le plan d'une ancienne salle, qu'il faut agrandir et orienter autrement.

2 · Support

Ancienne salle : rectangle $ABCD$ avec $A(0)$, $B(4)$, $C(4 + 3i)$, $D(3i)$ (unité : 2 m). La nouvelle salle est l'image de l'ancienne par la similitude directe S de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Le carreau coûte 7 500 F le mètre carré.

3 · Fonction

Tu es le maçon chargé du chantier. Tu dois donner la position des sommets et estimer le coût du carrelage.

4 · Consignes

- ❶ Écris l'écriture complexe de S et calcule les affixes des sommets A' , B' , C' , D' de la nouvelle salle.
- ❷ Calcule les dimensions réelles (en mètres) de l'ancienne et de la nouvelle salle, puis leurs aires.
- ❸ Calcule le coût du carrelage de la nouvelle salle.

Devoir de synthèse — Séquence 2

Nombres complexes et similitudes

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Reconnaître une similitude

Donne la nature et les éléments caractéristiques de chaque transformation :

- 1) $z' = (1 - i)z + i$ (2 pt)
- 2) $z' = -iz + 2$ (2 pt)
- 3) $z' = -3z + 4$ (1 pt)
- 4) $z' = \bar{z} + 2i$ (1 pt)

Exercice 2 (5 points) — Triangle équilatéral

Soient O l'origine, $B(4)$ et $C(2 + 2\sqrt{3}i)$.

- 1) Calcule $\frac{z_C}{z_B}$ sous forme trigonométrique et déduis-en la nature du triangle OBC . (3 pt)
- 2) Détermine l'abscisse du centre de gravité G de OBC . (2 pt)

Exercice 3 (9 points) — Situation : le jardin scolaire

Le club environnement d'un lycée de Sikasso veut agrandir un jardin triangulaire OAB , avec $O(0)$, $A(2)$, $B(2i)$ (unité : 5 m), à l'aide de la similitude directe S d'écriture $z' = (1 + i)z + 1$.

- 1) Détermine le centre, le rapport et l'angle de S . (3 pt)
- 2) Calcule les affixes des sommets O' , A' , B' du nouveau jardin. (2 pt)
- 3) Calcule l'aire réelle (en m^2) de l'ancien et du nouveau jardin. Justifie le rapport des aires. (2 pt)
- 4) Le grillage coûte 2 000 F le mètre. Calcule le coût du grillage du nouveau jardin (à 100 F près). (2 pt)

Séquence 3

Limites et continuité

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Limite de la composée d'une fonction de limite ℓ par une fonction continue en ℓ ; continuité de la composée ; continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires ; résolution approchée de $f(x) = \lambda$ par dichotomie ; fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

L'essentiel à retenir

- Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell$ et si v est continue en ℓ , alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = v(\ell)$. Plus généralement, si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = L$, alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = L$.
- Formes indéterminées : « $\infty - \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $0 \times \infty$ » : factoriser, simplifier, utiliser l'expression conjuguée ou une limite de référence ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$).
- Théorèmes de comparaison : si $u \leq f \leq v$ au voisinage de a et $\lim u = \lim v = \ell$, alors $\lim f = \ell$ (gendarmes).
- **Théorème des valeurs intermédiaires** : si f est continue sur $[a; b]$, tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent dans $[a; b]$. Si de plus f est strictement monotone, cet antécédent est unique.
- **Dichotomie** : si $f(a)f(b) < 0$, on calcule $f(\frac{a+b}{2})$ et on garde la moitié de l'intervalle où f change de signe ; on recommence jusqu'à la précision voulue.
- Une fonction continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de I sur $f(I)$; sa réciproque f^{-1} est continue, de même sens de variation, et sa courbe est symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.

Exercices d'application**Exercice 1 — Limites**

Calcule :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x} \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x}{1 - 4x^3} \end{aligned}$$

Exercice 2 — Composée et continuité

- 1) Justifie que $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Soit $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = a$. Détermine a pour que g soit continue en 0.
- 3) Soit $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ si $x \neq 3$. Peut-on prolonger h par continuité en 3 ?

Exercice 3 — Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.

- 1) Étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.
- 2) Par dichotomie, détermine un encadrement de α d'amplitude 0,125, puis donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près à la calculatrice.

Exercice 4 — Fonction réciproque

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$ sur $I = [2; +\infty[$.

- 1) Montre que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
- 2) Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$. Trace les courbes de f et f^{-1} dans un même repère.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Gendarmes

- 1) Montre que pour tout $x > 0$, $\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+\cos x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$ et déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\cos x}{x}$.
- 2) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 6 — Nombre de solutions

Soit $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. Étudie les variations de g ; montre que l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution β dans $\mathbb{R}$, que $\beta \in]1; 2[$, puis donne un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} .

Situations complexes**Situation complexe 3.1** Théorème des valeurs intermédiaires · dichotomie**Le réservoir sphérique du château d'eau****1 · Contexte**

La commune de Kalaban-Coro dispose d'un château d'eau dont le réservoir est une sphère de rayon 3 m. Le fontainier veut graduer une jauge de niveau.

2 · Support

Quand l'eau atteint la hauteur h (en m, $0 \leq h \leq 6$), le volume d'eau est $V(h) = \frac{\pi h^2(9-h)}{3}$ (en m^3). Le fontainier veut placer la marque correspondant à un volume de $10\pi \text{ m}^3$. Les habitants consomment environ 25 m^3 par jour.

3 · Fonction

Tu es le technicien de l'hydraulique. Tu dois calculer la hauteur de la marque.

4 · Consignes

- ❶ Calcule le volume total du réservoir et la hauteur d'eau quand il est à moitié plein.
- ❷ Montre que la hauteur cherchée vérifie $h^3 - 9h^2 + 30 = 0$ et que cette équation a une unique solution dans $[0; 3]$.
- ❸ Par dichotomie, détermine cette hauteur à 1 cm près.

Situation complexe 3.2 Bijection · fonction réciproque**L'âge des karités****1 · Contexte**

Un agent des eaux et forêts de Sikasso veut estimer l'âge des jeunes karités d'une plantation à partir de leur hauteur.

2 · Support

La hauteur d'un karité de t années est modélisée par $h(t) = \frac{20t}{t+10}$ (en mètres), pour $t \geq 0$. La plantation compte 400 arbres.

3 · Fonction

Tu es l'agent forestier. Tu dois construire un outil qui donne l'âge à partir de la hauteur.

4 · Consignes

- ❶ Montre que h est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; détermine l'intervalle J des hauteurs possibles et interprète $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$.
- ❷ Détermine l'expression de la fonction réciproque h^{-1} qui donne l'âge en fonction de la hauteur.
- ❸ Calcule l'âge d'un karité de 10 m, puis de 15 m.

Exemple résolu : tableau de variations et courbe

Exemple résolu — fonction avec valeur absolue, continuité, dérivabilité, discussion

Énoncé. Soit $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$ sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 1, dresse son tableau de variations, trace sa courbe et discute, suivant m , le nombre de solutions de l'équation $|x-1|(x+1) = m(x+1) - 2$.

1. Expression sans valeur absolue

Pour $x \geq 1$: $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$; pour $x < 1$, $x \neq -1$: $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x+1}$.

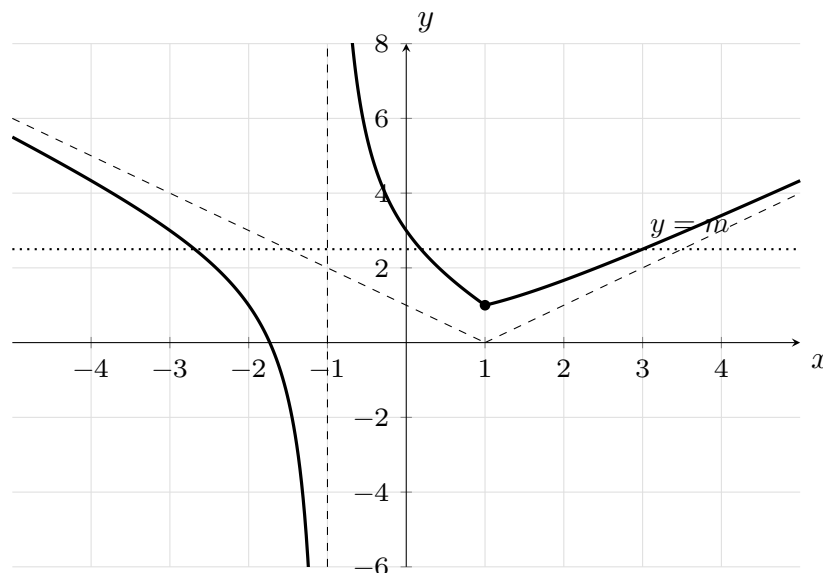
2. Continuité et dérivabilité en 1

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 + 1 = 1 = f(1)$: f est continue en 1. À droite : $f'_d(1) = 1 - \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$; à gauche : $f'_g(1) = -1 - \frac{2}{4} = -\frac{3}{2}$. Ces nombres sont différents : f n'est pas dérivable en 1 ; la courbe a un **point anguleux** en $(1; 1)$, avec deux demi-tangentes.

3. Dérivée et limites

Sur $] -\infty ; -1[$ et $] -1 ; 1[$: $f'(x) = -1 - \frac{2}{(x+1)^2} < 0$. Sur $]1 ; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ car $(x+1)^2 > 4$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. Asymptotes : $x = -1$; $y = 1 - x$ en $-\infty$; $y = x - 1$ en $+\infty$ (car $\frac{2}{x+1} \rightarrow 0$).

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	—		—	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

**4. Discussion**

Pour $x \neq -1$, l'équation équivaut à $|x-1| + \frac{2}{x+1} = m$, soit $f(x) = m$: on compte les points d'intersection de la courbe avec la droite horizontale $y = m$.

— Sur $] -\infty ; -1[$, f décroît de $+\infty$ à $-\infty$: **une solution** pour tout m .

— Sur $] -1; +\infty[$, le minimum vaut 1 : si $m < 1$, aucune solution ; si $m = 1$, une solution ($x = 1$) ; si $m > 1$, deux solutions.

Bilan : $m < 1$: 1 solution ; $m = 1$: 2 solutions ; $m > 1$: 3 solutions.

Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)

Exercice 7 — Limites

Calcule :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x - 8}{7x^3 + 2x + 1}$$

(Indications : factorise par $(x - 2)^2$ ou $(x + 1)^2$; pour la deuxième limite, exprime tout en fonction de $t = \tan x$.)

Exercice 8 — Continuité d'une fonction trigonométrique

Sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, on considère $f(x) = \sin x + \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$. Simplifie $f(x)$ pour $x \neq 0$; f est-elle continue en 0 ? Peut-on la prolonger autrement par continuité ?

Exercice 9 — Continuité et dérivabilité

Soit $f(x) = \frac{|x^2 - 16|}{x - 4}$ si $x \neq 4$ et $f(4) = 3$.

- 1) Écris $f(x)$ sans valeur absolue sur $] -\infty; -4]$, $[-4; 4[$ et $]4; +\infty[$.
- 2) Étudie la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ (en particulier en -4 et en 4).

Exercice 10 — Valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -1; 0[$ et donne-en un encadrement d'amplitude 10^{-1} par dichotomie.

Devoir de synthèse — Séquence 3

Limites et continuité

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Limites

Calcule :

(6 pt)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

Exercice 2 (4 points) — Prolongement par continuité

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ pour $x \in [-1; 0[\cup]0; +\infty[$. Montre que f admet un prolongement par continuité en 0 et précise la valeur de ce prolongement. (4 pt)

Exercice 3 (10 points) — Valeurs intermédiaires, dichotomie, bijection

Soit $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

- 1) Étudie les variations de g et dresse son tableau de variations. (2,5 pt)
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]2; 3[$. (2,5 pt)
- 3) Par dichotomie, détermine un encadrement de α d'amplitude 0,125. (2 pt)
- 4) Montre que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Calcule $g(2)$ et déduis-en $g^{-1}(-1)$. (3 pt)

Séquence 4

Dérivation

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables ; dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone ; dérivée de $x \mapsto x^m$ ($m \in \mathbb{Q}$) ; dérivée seconde ; dérivées successives ; applications (tangente, sens de variation, optimisation, cinématique).

L'essentiel à retenir

- Dérivées usuelles : $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Opérations : $(uv)' = u'v + uv'$; $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- **Composée** : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$; en particulier $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(\sin u)' = u' \cos u$, $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- Pour $m \in \mathbb{Q}$ et $x > 0$: $(x^m)' = mx^{m-1}$; pour $u > 0$: $(u^m)' = mu'u^{m-1}$.
- **Réciproque** : si f est dérivable et strictement monotone sur I et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- **Dérivée seconde** $f'' = (f')'$; dérivées successives $f^{(n)}$. Si f'' s'annule en changeant de signe, la courbe a un point d'inflexion.
- **Cinématique** : si $x(t)$ est la position d'un mobile, sa vitesse est $v(t) = x'(t)$ et son accélération $a(t) = x''(t)$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Dérivées de composées

Calcule la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle où elle est dérivable :

$$f_1(x) = (2x^2 - 3x + 1)^5 \quad f_2(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$f_3(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{4}) \quad f_4(x) = \cos^3 x$$

$$f_5(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad f_6(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

$$f_7(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad f_8(x) = \tan(2x)$$

Exercice 2 — Tangente et approximation

- 1) Détermine une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \sqrt{x+3}$ au point d'abscisse 1.
- 2) Dédus-en une valeur approchée de $\sqrt{4,02}$ et compare avec la calculatrice.

Exercice 3 — Dérivée d'une fonction réciproque

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

- 1) Montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) Calcule $f(1)$ et $f'(1)$, puis $(f^{-1})'(2)$.
- 3) Soit $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, réciproque de $x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$. Retrouve $g'(x)$ à l'aide de la formule de la dérivée d'une réciproque.

Exercice 4 — Dérivée seconde et dérivées successives

- 1) Calcule f' et f'' pour $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x$; étudie le signe de f'' et donne les abscisses des points d'inflexion.
- 2) Soit $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Calcule g' , g'' , g''' et conjecture l'expression de $g^{(n)}(x)$.
- 3) Montre que pour tout entier n , $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ (vérifie pour $n = 1, 2, 3, 4$).

Exercice 5 — Cinématique

Un mobile se déplace sur un axe; sa position à l'instant t (en s) est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$ (en m), pour $0 \leq t \leq 5$.

- 1) Calcule sa vitesse $v(t)$ et son accélération $a(t)$.
- 2) À quels instants le mobile s'arrête-t-il? Dans quel sens se déplace-t-il entre ces instants?
- 3) À quel instant l'accélération est-elle nulle? Quelle est alors la vitesse?

Exercices d'approfondissement**Exercice 6** — Équation et dérivée seconde

Soit $f(x) = \sin 2x$. Calcule $f''(x)$ et vérifie que $f'' + 4f = 0$. Trouve de même un réel k tel que $g(x) = \cos(3x)$ vérifie $g'' + kg = 0$.

Exercice 7 — Inégalité par l'étude d'une fonction

Soit $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ sur $[0; +\infty[$. Calcule h' , h'' et h''' ; déduis-en successivement les signes de h'' , h' et h , puis montre que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Situations complexes**Situation complexe 4.1** Dérivée · optimisation**Les caisses du forgeron de Kayes****1 · Contexte**

Un forgeron de Kayes fabrique des caisses sans couvercle pour ranger les outils agricoles. Il découpe des carrés aux quatre coins d'une plaque de tôle et relève les bords.

2 · Support

Plaque carrée de 60 cm de côté ; on découpe dans chaque coin un carré de côté x cm ($0 < x < 30$). Le volume de la caisse est $V(x) = x(60 - 2x)^2$ (en cm^3). La tôle coûte 4 500 F la plaque.

3 · Fonction

Tu es l'apprenti du forgeron. Tu dois déterminer la découpe qui donne la plus grande caisse.

4 · Consignes

- ❶ Justifie l'expression de $V(x)$, puis calcule $V'(x)$ et montre que $V'(x) = 12(x - 10)(x - 30)$.
- ❷ Dresse le tableau de variations de V sur $]0; 30[$ et détermine la valeur de x qui rend le volume maximal, ainsi que ce volume en litres.
- ❸ Calcule $V''(10)$ et explique comment ce signe confirme le résultat.

Situation complexe 4.2 Vitesse · accélération · dérivée seconde**La moto-taxi entre deux feux****1 · Contexte**

À Bamako, un chauffeur de moto-taxi démarre à un feu tricolore et s'arrête au feu suivant 10 secondes plus tard. Un élève étudie le mouvement de la moto entre les deux feux.

2 · Support

Distance parcourue (en m) : $d(t) = -\frac{t^3}{9} + \frac{5t^2}{3}$ pour $0 \leq t \leq 10$ (t en secondes). La vitesse est limitée à 50 km/h en ville.

3 · Fonction

Tu es l'élève qui étudie le mouvement. Tu dois décrire la vitesse et l'accélération de la moto.

4 · Consignes

- ❶ Calcule la vitesse $v(t) = d'(t)$ et l'accélération $a(t) = d''(t)$.
- ❷ Détermine l'instant où la vitesse est maximale et cette vitesse en km/h. La limitation est-elle respectée ?
- ❸ Calcule la distance parcourue en 10 secondes et la vitesse moyenne correspondante.

Exemple résolu : tableau de variations et courbe**Exemple résolu — fonction polynôme définie par ses extremums**

Énoncé. Détermine $f(x) = ax^3 + bx + c$ sachant que f admet pour extremum 3 en -1 et -1 en 1. Étudie f , sa dérivée seconde, et trace sa courbe.

1. Détermination de a , b , c

$f'(x) = 3ax^2 + b$. Les conditions $f'(-1) = f'(1) = 0$ donnent $b = -3a$. Puis $f(-1) = -a - b + c = 2a + c = 3$ et $f(1) = a + b + c = -2a + c = -1$. On obtient $a = 1$, $c = 1$, $b = -3$:
 $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

2. Variations

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty.$$

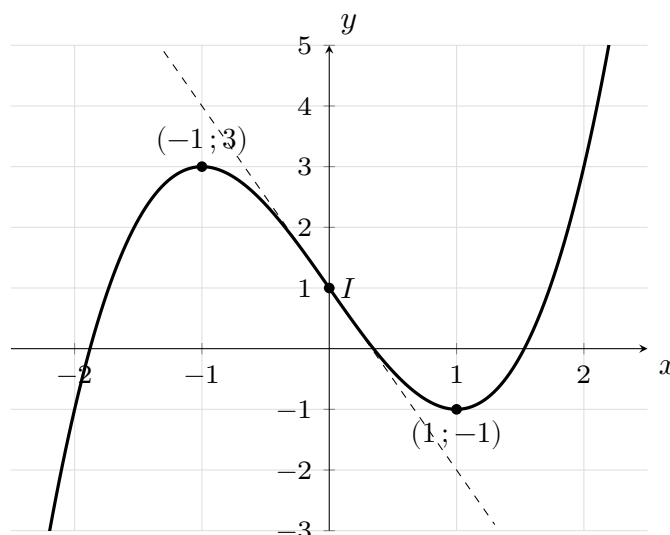
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

3. Dérivée seconde et point d'inflexion

$f''(x) = 6x$ s'annule en 0 en changeant de signe : le point $I(0;1)$ est un point d'inflexion. La tangente en I a pour équation $y = -3x + 1$; la courbe est au-dessous de cette tangente pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$ (car $f(x) - (-3x + 1) = x^3$).

4. Équation $f(x) = 0$

D'après le tableau, $f(x) = 0$ a trois solutions : $\alpha_1 \in]-2; -1[$, $\alpha_2 \in]0; 1[$ et $\alpha_3 \in]1; 2[$ (valeurs intermédiaires) ; à la calculatrice, $\alpha_1 \approx -1,88$, $\alpha_2 \approx 0,35$, $\alpha_3 \approx 1,53$.

**Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)****Exercice 8** — Calculs de dérivées

Calcule la dérivée de chaque fonction :

$$f_1(x) = -3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x + 9 \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x + 1}$$

$$f_3(x) = \frac{5}{3x + 1} \quad f_4(x) = \sin 3x \cos 2x$$

$$f_5(x) = x^3 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2 \cos(2x + 1)$$

$$f_6(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 3} \quad f_7(x) = \frac{2x - 5}{2 - x}$$

$$f_8(x) = (x^3 + 2x)^6$$

Exercice 9 — Dérivabilité en un point

Soit $f(x) = \frac{2}{|x+2|+3}$ sur $\mathbb{R}$. Étudie la dérivabilité de f en -2 (calcule les nombres dérivés à gauche et à droite) et interprète graphiquement.

Exercice 10 — Fonction trigonométrique et factorisation de la dérivée

Soit $g(x) = 4x - \tan^2 x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Calcule $g'(x)$ et vérifie que $g'(x) = 2(1 - \tan x)(\tan^2 x + \tan x + 2)$. Déduis-en le sens de variation de g et son maximum.

Exercice 11 — Détermination d'une fonction polynôme

- 1) Détermine $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$. Dresse son tableau de variations.
- 2) Détermine $g(x) = ax^3 + bx^2 - x + 3$ sachant que sa courbe admet un extremum égal à 2 au point d'abscisse 1. Avec $a = 1$ et $b = -1$, étudie les variations de g ; montre que l'équation $g(x) = 7$ admet une seule solution α dans $[1; +\infty[$ et encadre α par deux entiers consécutifs. Calcule $g(0)$ et, pour la restriction de g à $[-\frac{1}{3}; 1]$, le nombre $(g^{-1})'(3)$.

Exercice 12 — Fonction polynôme de degré 4

Soit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ et $A(1; -\frac{1}{2})$.

- 1) Détermine a, b, c pour que : $f(0) = f(2)$; la courbe passe par A ; la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- 2) Soit $g(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 3x$ sur $[0; 2]$. Vérifie que $g'(x) = (x-1)(4x^2 - 8x + 3)$, étudie les variations de g et trace sa courbe (unités : 4 cm en abscisse, 16 cm en ordonnée).

Devoir de synthèse — Séquence 4

Dérivation

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Calcul de dérivées

Calcule les dérivées de : $f(x) = (x^2 - 3x)^4$; $g(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$; $h(x) = \cos^2(3x)$; $k(x) = x^{\frac{3}{2}}(x + 1)$. (6 pt)

Exercice 2 (5 points) — Étude d'une fonction irrationnelle

Soit $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2; 2]$.

- 1) Montre que f est impaire et que, pour $x \in]-2; 2[$, $f'(x) = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$. (3 pt)
- 2) Dresse le tableau de variations de f et donne son maximum. (2 pt)

Exercice 3 (9 points) — Situation : la boîte de concentré de tomate

Une conserverie de Baguinéda veut fabriquer des boîtes cylindriques de concentré de tomate d'un volume de $1\,000\text{ cm}^3$, en utilisant le moins de métal possible. On note r le rayon et h la hauteur de la boîte (en cm).

- 1) Exprime h en fonction de r et montre que l'aire totale de métal est $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$. (2 pt)
- 2) Calcule $S'(r)$ et dresse le tableau de variations de S sur $]0; +\infty[$. (3 pt)
- 3) Détermine le rayon et la hauteur qui minimisent la quantité de métal (à 0,01 cm près). Quelle relation y a-t-il entre h et r ? (2,5 pt)
- 4) Calcule $S''(r)$ et confirme la nature de l'extremum. (1,5 pt)

Séquence 5

Primitives

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Primitives usuelles (définies à partir des dérivées) ; ensemble des primitives d'une fonction ; primitive prenant une valeur donnée en un point ; primitives des fonctions de type $(g' \circ f) \times f'$ et $f' f^m$ ($m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$).

L'essentiel à retenir

- F est une primitive de f sur I si $F' = f$. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives ; elles diffèrent d'une constante : $F + k$. Il existe une unique primitive qui prend la valeur y_0 en x_0 .
- Primitives usuelles :

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^m ($m \neq -1$)	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

- $f' \times f^m$ ($m \in \mathbb{Q}$, $m \neq -1$) a pour primitive $\frac{f^{m+1}}{m+1}$; $\frac{f'}{f^2}$ a pour primitive $-\frac{1}{f}$; $\frac{f'}{\sqrt{f}}$ a pour primitive $2\sqrt{f}$.
- $(g' \circ f) \times f'$ a pour primitive $g \circ f$; par exemple $f' \cos f$ a pour primitive $\sin f$.
- Linéarisation : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Primitives usuelles

Détermine une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué :

$$f_1(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_3(x) = \sqrt{x} \text{ sur } [0; +\infty[$$

$$f_4(x) = \cos x - 2 \sin x \quad f_5(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f_6(x) = \tan^2 x \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

Exercice 2 — Formes $f'f^m$ et $(g' \circ f)f'$

Détermine une primitive de :

$$g_1(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 3)^4 \quad g_2(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$g_3(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} \text{ sur }]-2; +\infty[$$

$$g_4(x) = x\sqrt{x^2 + 5} \quad g_5(x) = \sin x \cos^4 x \quad g_6(x) = 2x \cos(x^2) \\ g_7(x) = \cos^2 x$$

Exercice 3 — Primitive vérifiant une condition

- 1) Détermine la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ telle que $F(2) = 5$.
- 2) Détermine la primitive G de $g(x) = \cos 2x$ telle que $G(\frac{\pi}{4}) = 1$.
- 3) Détermine la primitive H de $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ qui s'annule en 4.

Exercice 4 — Vérification

Montre que $F(x) = x \sin x + \cos x$ est une primitive de $f(x) = x \cos x$ sur $\mathbb{R}$. Déduis-en la primitive de f qui vaut 3 en 0.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Décomposition d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.

- 1) Détermine a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$.
- 2) Déduis-en les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6 — Linéarisation

- 1) Vérifie que $\sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x$ et déduis-en une primitive de $\sin^3 x$.
- 2) Linéarise $\cos^2 x \sin^2 x$ (utilise $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$) et déduis-en une primitive.

Situations complexes**Situation complexe 5.1** Primitive · condition initiale · cinématique**Le freinage du camion de mangues****1 · Contexte**

Sur la route Sikasso-Bamako, un camion chargé de mangues freine en voyant un troupeau

traverser la chaussée à 60 m devant lui.

2 · Support

Pendant le freinage, la vitesse du camion est $v(t) = 20 - 4t$ (en m/s), t en secondes ; au début du freinage ($t = 0$), le camion est à la position $x(0) = 0$. La position $x(t)$ est la primitive de v qui s'annule en 0. Le chargement pèse 10 tonnes.

3 · Fonction

Tu es l'expert de l'assurance. Tu dois dire si le camion pouvait s'arrêter avant le troupeau.

4 · Consignes

- 1 Convertis la vitesse initiale en km/h et détermine l'instant où le camion s'arrête.
- 2 Détermine la position $x(t)$ du camion pendant le freinage.
- 3 Calcule la distance de freinage et dis si le troupeau a été évité ; calcule la marge de sécurité.

Situation complexe 5.2 Primitive · volume pompé

La pompe solaire du forage

1 · Contexte

Un village du cercle de Bougouni est équipé d'un forage avec une pompe solaire. Le chef de village veut savoir si l'eau pompée chaque jour suffit à la population.

2 · Support

Le débit de la pompe, t heures après 6 h, est $d(t) = -0,5t^2 + 6t$ (en m^3/h), pour $0 \leq t \leq 12$. Le volume pompé depuis 6 h est la primitive V de d telle que $V(0) = 0$. Le village a besoin de 120 m^3 par jour.

3 · Fonction

Tu es le technicien de la pompe. Tu dois présenter le fonctionnement de la pompe au comité de gestion de l'eau.

4 · Consignes

- 1 Détermine l'heure à laquelle le débit est maximal et ce débit.
- 2 Détermine $V(t)$ et calcule le volume pompé dans la journée (de 6 h à 18 h). Le besoin du village est-il couvert ?
- 3 À l'aide de la calculatrice, détermine vers quelle heure le volume de 120 m^3 est atteint.

Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)

Exercice 7 — Primitives (1)

Détermine une primitive F de f dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \quad f(x) = x(x^2 + 3)^4$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3 + 2)^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right)^5 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \quad (x > 0)$$

$$f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \quad f(x) = (2x + 5)(x^2 + 5x + 3)^3$$

$$f(x) = \frac{4}{(3 - 2x)^5} \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x^3 - 3x^2 + 6x + 1)^2}$$

Exercice 8 — Décomposition et primitive

Soit $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$.

- 1) Trouve les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$ pour $x \neq 1$.
- 2) Dédus-en la primitive de f sur $]1; +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 9 — Primitives (2)

- 1) Soit $f(x) = \sin \sqrt{x}$. Calcule $f'(x)$ et déduis-en une primitive de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$ sur $]0; 2]$.
- 2) Détermine le réel b tel que $x^2 + 3 = (x^2 - 1) + b$. Dédus-en une primitive de $h(x) = \frac{x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$ sur $[-3; -2]$.
- 3) Soit $f_1(x) = \frac{x}{\sin x}$. Calcule $f_1'(x)$ et déduis-en une primitive de $g_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{1 - \cos^2 x}$ sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Devoir de synthèse — Séquence 5

Primitives

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (8 points) — Primitives

Détermine une primitive de chaque fonction sur un intervalle convenable :

$$f_1(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2} \quad f_2(x) = (3x - 2)^5$$

$$f_3(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad f_4(x) = \cos x \sin^3 x$$

$$f_5(x) = \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \quad f_6(x) = \sin(4x)$$

$$f_7(x) = 3x^2 \cos(x^3) \quad f_8(x) = \sin^2 x$$

(8 pt)

Exercice 2 (4 points) — Primitive vérifiant une condition

1) Détermine la primitive F de $f(x) = 6x^2 - 2x + 5$ telle que $F(1) = 0$. (2 pt)

2) Détermine la primitive G de $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$. (2 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : la pirogue à moteur

Une pirogue à moteur quitte le port de Mopti. Son accélération est $a(t) = 6 - 2t$ (en m/s^2) pour $0 \leq t \leq 6$ (t en s). À $t = 0$, sa vitesse et sa position sont nulles.

1) Détermine la vitesse $v(t)$, primitive de a qui s'annule en 0. (2 pt)

2) Détermine l'instant où la vitesse est maximale et cette vitesse en km/h . (2 pt)

3) Détermine la position $x(t)$, primitive de v qui s'annule en 0. (2 pt)

4) À quel instant la pirogue s'arrête-t-elle ? Quelle distance a-t-elle alors parcourue ? (2 pt)

Unité d'apprentissage 2

UA2

Calcul intégral · Études de fonctions · Logarithme ·
Exponentielle et puissances · Équations différentielles

Séquence 6

Calcul intégral

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Intégrale d'une fonction continue sur $[a; b]$ (introduite à partir des primitives) ; propriétés ; calcul d'aire ; intégration par parties ; calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles ; valeur moyenne.

L'essentiel à retenir

- Si F est une primitive de f continue sur $[a; b]$: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- Propriétés : linéarité ; relation de Chasles $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$; si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ ($a \leq b$), $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- **Aire** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'aire sous la courbe est $\int_a^b f(x) dx$ unités d'aire (u.a.) ; si $f \leq 0$, c'est $-\int_a^b f$; entre deux courbes ($f \geq g$) : $\int_a^b (f - g)$. Une u.a. est l'aire du rectangle construit sur les unités des axes.
- **Valeur moyenne** : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
- **Intégration par parties** : $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$. On choisit u facile à dériver (polynôme, ln) et v' facile à intégrer.
- **Méthode des rectangles** : on partage $[a; b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$; $\int_a^b f \approx h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)]$ (rectangles à gauche) ou $h[f(a+h) + \dots + f(b)]$ (à droite). Si f est monotone, l'intégrale est comprise entre les deux sommes.

Exercices d'application**Exercice 1** — Calculs d'intégrales

Calcule :

$$\int_{-1}^2 (x^2 - x + 1) dx \quad \int_0^\pi \sin x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x^2 + 16} dx \quad \int_{-\pi}^\pi \cos^2 x dx$$

$$\int_{-2}^2 |x - 1| dx$$

Exercice 2 — Aires

- 1) Calcule l'aire du domaine limité par la courbe de $f(x) = \sin x$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2\pi$.
- 2) Calcule l'aire du domaine compris entre les paraboles $y = x^2$ et $y = 2x - x^2$.
- 3) Le plan est muni d'un repère d'unités 2 cm et 1 cm. Calcule, en cm^2 , l'aire sous la courbe de $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 3 — Intégration par parties

Calcule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx \quad \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$\int_0^1 x(1-x)^4 \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx \text{ (deux intégrations)}$$

Exercice 4 — Méthode des rectangles

On veut une valeur approchée de $I = \int_0^1 x^2 \, dx$.

- 1) Partage $[0; 1]$ en 4 intervalles égaux et calcule les sommes des rectangles à gauche s_4 et à droite S_4 . Fais une figure.
- 2) Calcule la valeur exacte de I et vérifie que $s_4 \leq I \leq S_4$.
- 3) Reprends le calcul avec 10 intervalles. Que constates-tu ?

Exercice 5 — Valeur moyenne

La température (en $^{\circ}\text{C}$) à Gao, t heures après minuit, est modélisée par $T(t) = 32 - 8 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ pour $0 \leq t \leq 24$. Calcule la température moyenne de la journée, puis entre 6 h et 18 h.

Exercices d'approfondissement**Exercice 6** — Encadrement d'une intégrale

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

- 1) Montre que pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et déduis-en un encadrement de I .
- 2) Calcule une valeur approchée de I par la méthode des rectangles à gauche et à droite avec $n = 5$. (On admet que $I = \frac{\pi}{4}$: compare.)

Exercice 7 — Suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n(1-x) dx$.

- 1) Calcule I_0 , I_1 et I_n en fonction de n .
- 2) Montre que (I_n) est décroissante et calcule sa limite.

Situations complexes**Situation complexe 6.1** Aire · intégrale · méthode des rectangles**Le champ au bord du fleuve****1 · Contexte**

Un maraîcher de Kalaban-Coro veut acheter un terrain bordé d'un côté par une piste rectiligne et de l'autre par la berge du fleuve Niger. Il veut en connaître la superficie.

2 · Support

Dans un repère orthonormé (unité : 1 m), la piste est l'axe des abscisses entre $x = 0$ et $x = 100$; la berge est la courbe d'équation $y = -0,02x^2 + 2x$. Le terrain est vendu 1 500 F le mètre carré.

3 · Fonction

Tu es le géomètre consulté par le maraîcher. Tu dois calculer la superficie et le prix du terrain.

4 · Consignes

- 1 Trace la berge et la piste, puis détermine la largeur maximale du terrain (distance maximale entre la piste et la berge).
- 2 Calcule l'aire exacte du terrain en m^2 et en hectares, puis son prix.
- 3 Le vendeur a estimé l'aire par la méthode des rectangles à gauche avec 5 intervalles. Calcule cette estimation et l'erreur commise sur le prix.

Situation complexe 6.2 Intégration par parties · valeur moyenne**La quantité de médicament absorbée****1 · Contexte**

Un pharmacien du centre de santé communautaire de Kati explique à des stagiaires l'absorption d'un comprimé antipaludique.

2 · Support

La vitesse d'absorption du principe actif, t heures après la prise, est $r(t) = 4te^{-0,5t}$ (en mg/h).

La quantité absorbée entre les instants 0 et T est $\int_0^T r(t) dt$. Un comprimé contient 20 mg de principe actif. (À traiter après la séquence 9.)

3 · Fonction

Tu es le stagiaire chargé de l'exposé. Tu dois calculer la quantité absorbée et la vitesse moyenne d'absorption.

4 · Consignes

- ❶ Étudie les variations de r sur $[0 ; 12]$ et donne l'instant où l'absorption est la plus rapide.
- ❷ À l'aide d'une intégration par parties, calcule la quantité absorbée pendant les 6 premières heures (valeur exacte et valeur approchée à 0,01 mg). Quel pourcentage du comprimé cela représente-t-il ?
- ❸ Calcule la vitesse moyenne d'absorption sur les 6 premières heures.

Exemple résolu : aire entre une courbe et une asymptote

Exemple résolu — aire entre $(\mathcal{C})$ et son asymptote oblique

Énoncé. Soit $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$ sur $]1 ; +\infty[$ (repère orthonormé, unité 3 cm). Calcule l'aire du domaine limité par la courbe, la droite $(D) : y = 3x - 1$ et les droites $x = 2$ et $x = 5$.

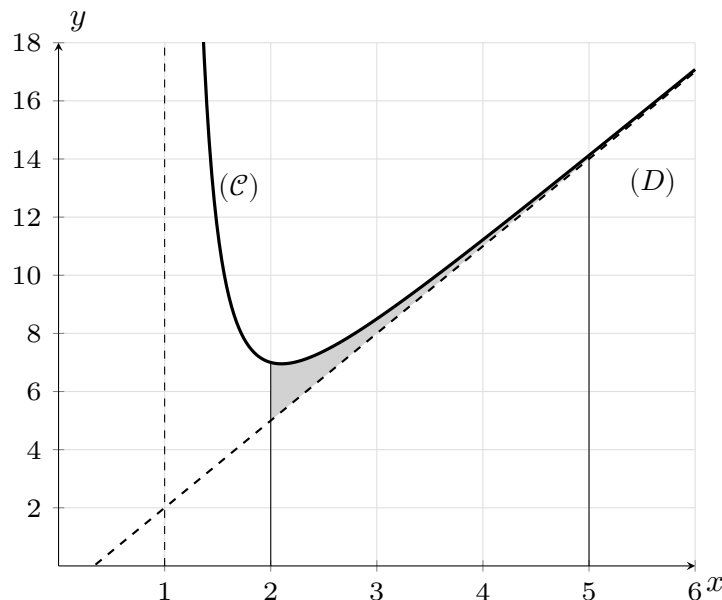
1. Position

$$f(x) - (3x - 1) = \frac{2}{(x-1)^2} > 0 : \text{la courbe est au-dessus de } (D).$$

2. Calcul de l'aire

$$\mathcal{A} = \int_2^5 \frac{2}{(x-1)^2} dx = \left[-\frac{2}{x-1} \right]_2^5 = -\frac{2}{4} + 2 = \frac{3}{2} \text{ u.a.}$$

Une unité d'aire vaut $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$, donc $\mathcal{A} = 13,5 \text{ cm}^2$.



Remarque. La partie grisée est la bande comprise entre la courbe et l'asymptote ; plus x augmente, plus cette bande devient étroite.

Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)

Exercice 8 — Intégrales (1)

Calcule :

$$I_1 = \int_0^2 \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x + 1) \cos 2x dx$$

$$I_3 = \int_{-4}^1 (|x + 3| + |1 - 2x|) dx$$

(Indications : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$; intègre I_2 par parties ; découpe I_3 avec la relation de Chasles.)

Exercice 9 — Intégrales (2)

Calcule :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x \sin 2x dx$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx \text{ (par parties, avec } v'(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \text{)}$$

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^4 x dx \text{ (écris } \cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x) \text{)}$$

$$J_4 = \int_0^1 (x + 2) \sqrt{x + 3} dx \text{ (pose } u = x + 3 \text{)}$$

Exercice 10 — Intégration par parties avec l'exponentielle — après la séquence 9

Calcule par parties $I = \int_0^1 (x + 2)e^x dx$ et $J = \int_{-1}^0 (-2x + 1)e^{-x} dx$.

Devoir de synthèse — Séquence 6

Calcul intégral

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Calculs d'intégralesCalcule : $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$; $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$. (6 pt)**Exercice 2** (5 points) — Intégration par partiesCalcule $I = \int_0^{\pi} x \cos x dx$ et $J = \int_1^e x^2 \ln x dx$. (5 pt)**Exercice 3** (9 points) — Situation : le canal d'irrigation de l'Office du NigerLa section d'un canal d'irrigation est limitée par le fond, de forme parabolique d'équation $y = \frac{x^2}{2}$, et par la surface de l'eau, d'équation $y = 2$ (unité : 1 m), pour $-2 \leq x \leq 2$.

- 1) Fais une figure et calcule la largeur du canal à la surface et sa profondeur maximale. (1,5 pt)
- 2) Calcule l'aire exacte de la section mouillée. (2,5 pt)
- 3) Calcule une valeur approchée de $\int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx$ par la méthode des rectangles à droite avec 4 intervalles, puis à gauche ; compare avec la valeur exacte. (3 pt)
- 4) L'eau s'écoule à la vitesse moyenne de 0,5 m/s. Calcule le débit du canal en m^3/s et le volume écoulé en une heure. (2 pt)

Séquence 7

Études de fonctions

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonctions polynômes et rationnelles ; fonctions du type $x \mapsto f(\cos x, \sin x)$ et $x \mapsto f(\tan x)$; asymptotes obliques ; position d'une courbe par rapport à ses asymptotes ; éléments de symétrie ; périodicité.

L'essentiel à retenir

- Plan d'étude : ensemble de définition ; réduction du domaine d'étude (parité, périodicité) ; limites et asymptotes ; dérivée, signe, variations ; points particuliers, tangentes ; tableau de valeurs ; courbe. (La recherche des points d'inflexion n'est pas systématique.)
- Parité : si $f(-x) = f(x)$, la courbe est symétrique par rapport à (Oy) ; si $f(-x) = -f(x)$, elle est symétrique par rapport à O . Le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie si $f(2a - x) + f(x) = 2b$; la droite $x = a$ est axe de symétrie si $f(2a - x) = f(x)$.
- Périodicité : $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques ; $x \mapsto \cos(\omega x)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique ; $\tan$ est π -périodique et définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. On étudie sur une période (puis sur une demi-période si la fonction est paire ou impaire) et on complète par symétrie et translation.
- **Asymptote oblique** $y = ax + b$ en $\pm\infty$: $\lim [f(x) - (ax + b)] = 0$. Le signe de $f(x) - (ax + b)$ donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercices d'application

Exercice 1 — Fonction rationnelle et asymptote oblique

Soit $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Détermine D_f et les limites aux bornes ; montre que $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$.
- 2) Déduis-en les asymptotes de $(\mathcal{C})$ et la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique.
- 3) Montre que $f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$, dresse le tableau de variations et montre que $\Omega(1; 3)$ est centre de symétrie. Trace $(\mathcal{C})$.

Exercice 2 — Fonction polynôme

Soit $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Étudie g (limites, variations, extremums) ; montre que $g(x) = (x + 1)(x - 2)^2$; donne les points d'intersection avec les axes et trace la courbe. Montre que le point $I(1; 2)$ est centre de symétrie.

Exercice 3 — Fonction trigonométrique

Soit $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$.

- 1) Montre que f est paire et 2π -périodique ; justifie qu'on peut l'étudier sur $[0; \pi]$.
- 2) Montre que $f'(x) = -2 \sin x(2 \cos x + 1)$; étudie son signe sur $[0; \pi]$ et dresse le tableau de variations.

3) Trace la courbe sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 4 — Fonction avec tan

Soit $h(x) = \tan x - x$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- 1) Montre que h est impaire et que $h'(x) = \tan^2 x$. Déduis-en le sens de variation de h .
- 2) Calcule les limites aux bornes et déduis-en le signe de $\tan x - x$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 5 — Quotient trigonométrique

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ sur $\mathbb{R}$.

- 1) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π -périodique.
- 2) Montre que $f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$ et dresse le tableau de variations sur $[0; \pi]$.
- 3) Déduis-en que pour tout réel x , $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 6 — Fonction irrationnelle et asymptotes

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. Montre que les droites $y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$, et précise la position de la courbe par rapport à ces droites.

Situations complexes

Situation complexe 7.1 Fonction trigonométrique · périodicité

La crue du fleuve à Mopti

1 · Contexte

Les piroguiers de Mopti veulent prévoir les mois où la navigation des grandes pinasses est possible entre Mopti et Tombouctou.

2 · Support

La hauteur d'eau du fleuve (en m) t mois après la mi-novembre est modélisée par $h(t) = 4 + 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, pour $0 \leq t \leq 12$. Les grandes pinasses ne peuvent naviguer que si $h(t) \geq 2,5$ m.

3 · Fonction

Tu es le chef de la coopérative des piroguiers. Tu dois établir le calendrier de navigation.

4 · Consignes

- 1 Justifie que h est périodique de période 12 mois et calcule les hauteurs maximale et minimale ainsi que les mois correspondants.
- 2 Étudie les variations de h sur $[0; 12]$ et trace sa courbe.
- 3 Résous $h(t) \geq 2,5$ sur $[0; 12]$ et détermine la durée de la période de navigation, ainsi que le mois où elle s'arrête.

Situation complexe 7.2 Fonction rationnelle · maximum · inéquation**Le sirop antipaludique****1 · Contexte**

Le médecin du CSCOM de Banconi étudie l'effet d'un sirop antipaludique chez l'enfant pour fixer l'intervalle entre deux prises.

2 · Support

La concentration du médicament dans le sang, t heures après la prise, est $C(t) = \frac{8t}{t^2 + 4}$ (en mg/L), pour $t \geq 0$. Le médicament est efficace lorsque la concentration est au moins égale à 1,6 mg/L.

3 · Fonction

Tu es l'infirmier qui assiste le médecin. Tu dois décrire l'évolution de la concentration et proposer un horaire de prise.

4 · Consignes

- ❶ Calcule $C'(t)$, dresse le tableau de variations de C sur $[0; +\infty[$ et donne la concentration maximale et l'instant correspondant.
- ❷ Calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ et interprète.
- ❸ Détermine la période pendant laquelle le médicament est efficace et propose l'heure de la prise suivante si la première a lieu à 8 h.

Exemples résolus : tableaux de variations et courbes**Exemple résolu — fonction rationnelle, asymptote oblique, centre de symétrie, discussion**

Énoncé. Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Étudie f , trace sa courbe et discute graphiquement le nombre de solutions de $f(x) = m$.

1. Écriture réduite et asymptotes

$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ pour $x \neq 1$. Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. La droite $x = 1$ est asymptote verticale; $(D) : y = x$ est asymptote oblique

car $f(x) - x = \frac{1}{x-1} \rightarrow 0$; la courbe est au-dessus de (D) si $x > 1$, au-dessous si $x < 1$.

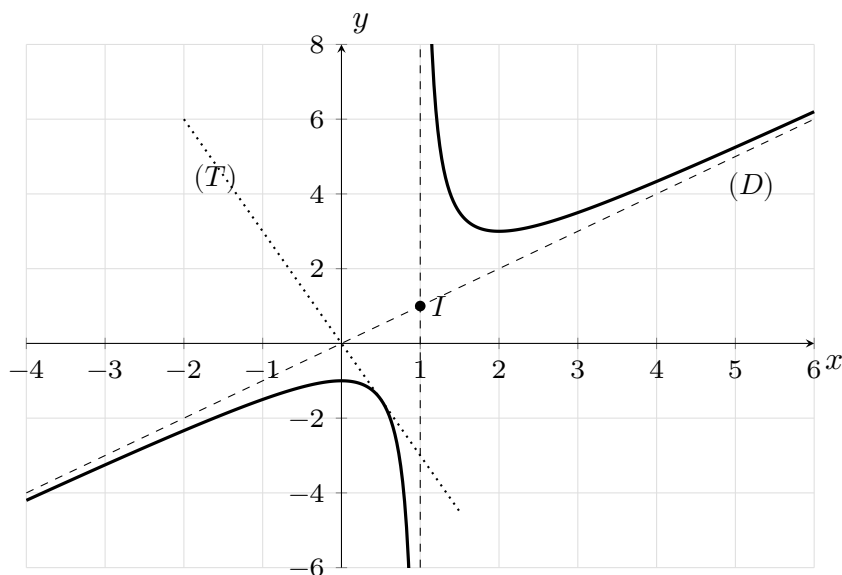
2. Dérivée et tableau

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}; f(0) = -1 \text{ et } f(2) = 3.$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-1		3	$+\infty$

3. Centre de symétrie et tangente

Le point $I(1;1)$, intersection des asymptotes, est centre de symétrie : $f(2-x) + f(x) = 2 - x + \frac{1}{1-x} + x + \frac{1}{x-1} = 2$. Tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$: $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -3$, d'où $(T) : y = -3x$.



4. Discussion de $f(x) = m$

$m < -1$: deux solutions (inférieures à 1); $m = -1$: une solution ($x = 0$); $-1 < m < 3$: aucune solution; $m = 3$: une solution ($x = 2$); $m > 3$: deux solutions (supérieures à 1).

Exemple résolu — fonction trigonométrique

Énoncé. Étudie $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ et trace sa courbe sur $[-\pi; \pi]$.

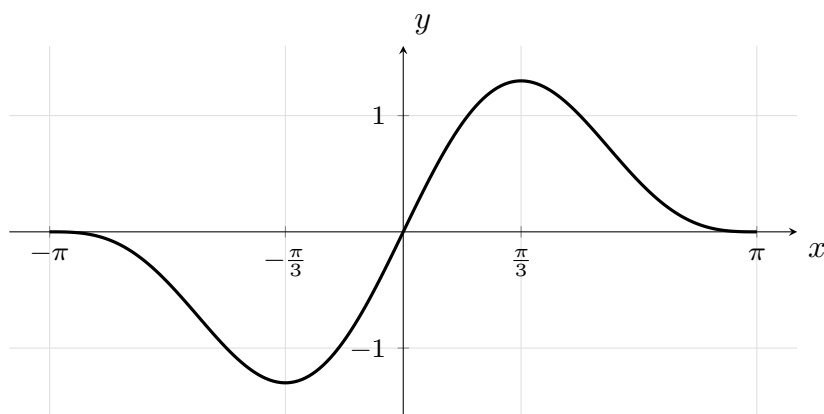
1. Réduction de l'intervalle d'étude

f est 2π -périodique et impaire ($f(-x) = -f(x)$) : on l'étudie sur $[0; \pi]$, puis on complète par symétrie de centre O .

2. Dérivée

$f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. Sur $[0; \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$ et $2 \cos x - 1 \geq 0 \iff x \leq \frac{\pi}{3}$. $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,30$.

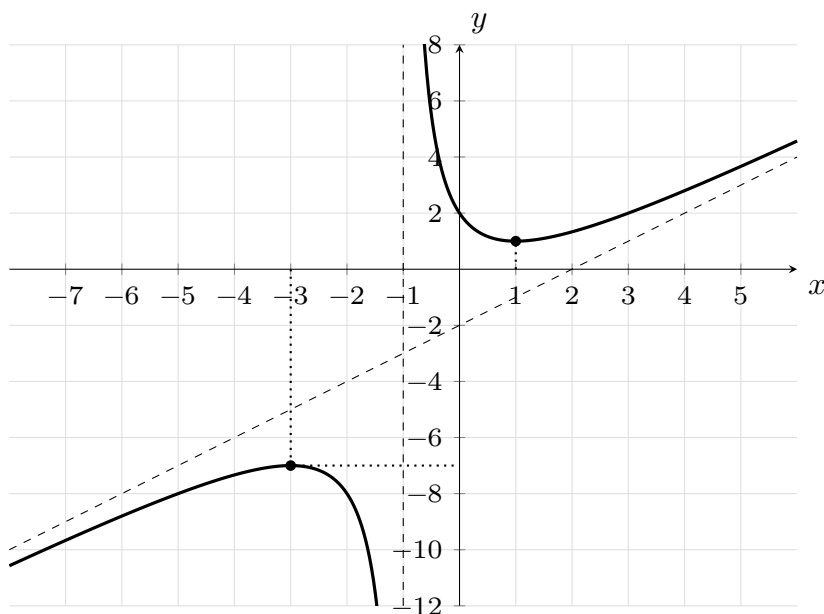
x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

**3. Aire**

$$f \geq 0 \text{ sur } [0; \pi] \text{ et } \int_0^\pi f(x) dx = \left[-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^\pi = \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \left(-1 - \frac{1}{4} \right) = 2 \text{ u.a.}$$

Lecture graphique (recueil de devoirs)**Exercice 7** — Lire une courbe : limites, asymptotes, variations, bijection

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé. Les droites d'équations $x = -1$ et $y = x - 2$ sont asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

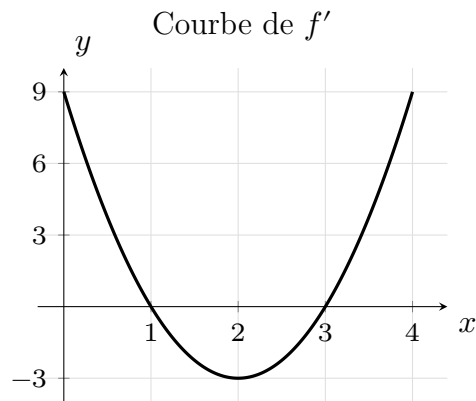
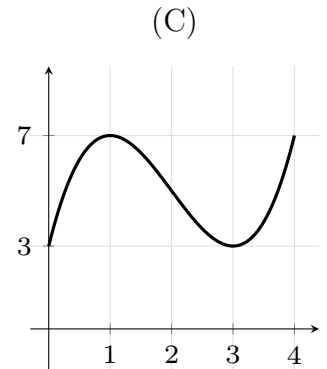
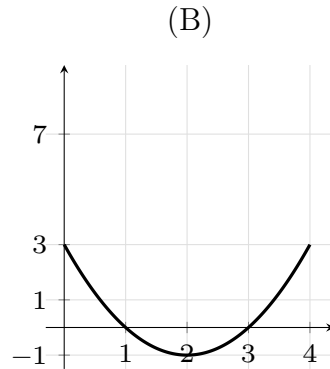
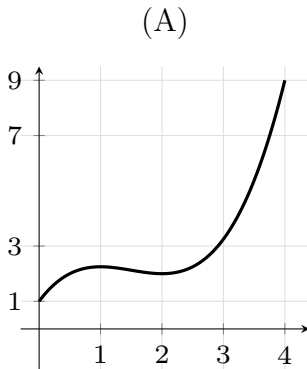


- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f et les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Donne les équations des asymptotes et dresse le tableau de variations de f (on lit $f(-3) = -7$ et $f(1) = 1$).
- 3) Résous graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.
- 4) Montre que la restriction g de f à $] -\infty; -3]$ réalise une bijection sur un intervalle P à préciser ; trace la courbe de g^{-1} .

5) On admet que $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$. Vérifie par le calcul les résultats lus sur le graphique.

Exercice 8 — Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

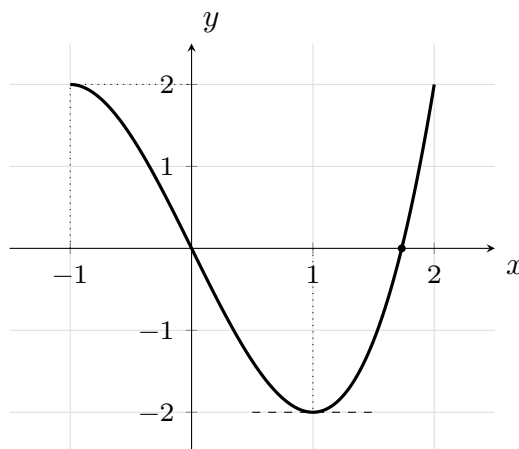
Les courbes (A), (B), (C) ci-dessous représentent trois fonctions définies sur $[0; 4]$. La quatrième figure représente une fonction dérivée f' .



- 1) Laquelle des trois fonctions (A), (B), (C) a pour dérivée la fonction f' représentée ? Justifie à l'aide du signe de f' et des extremums.
- 2) Dresse le tableau de variations de f sur $[0; 4]$.
- 3) Donne les équations des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 0, 2 et 4 (on lit $f'(0) = 9$, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 9$, $f(0) = 3$, $f(2) = 5$, $f(4) = 7$).
- 4) On suppose que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Détermine a , b , c , d .

Exercice 9 — Lire une courbe et retrouver la fonction

La courbe ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $[-1; 2]$; la tangente au point d'abscisse 1 est horizontale.



- 1) Lis sur le graphique $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f'(1)$.
- 2) Résous graphiquement $f(x) = 0$ et $f(x) < 0$. Dresse le tableau de variations de f sur $[-1; 2]$.
- 3) On suppose que $f(x) = ax^3 + bx + c$. Calcule a , b , c , puis la valeur exacte de la solution non nulle de $f(x) = 0$.

Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)**Exercice 10** — Fonction rationnelle déterminée par des conditions

- 1) Soit $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$. Détermine a , b , c sachant que la courbe de h passe par $A(0; 2)$ et $B(2; -2)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.
- 2) On pose $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x - 1}$. Écris $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$ et étudie f .
- 3) Montre que $(D) : y = -x + 1$ est asymptote oblique ; étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
- 4) Donne une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
- 5) Montre que f ne s'annule pas, puis que l'équation $f(x) = -2,25$ admet une solution unique ℓ dans $[2; 3]$.
- 6) Trace $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exercice 11 — Fonction rationnelle, signe et bijection

Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 6}{x - 2}$.

- 1) Détermine a , b , c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$; montre que $f'(x) = \frac{x(4 - x)}{(x - 2)^2}$ et dresse le tableau de variations.
- 2) Montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) ; étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .

- 3) Étudie le signe de $f(x)$.
- 4) Soit g la restriction de f à $[0; 2[$. Montre que g réalise une bijection de $[0; 2[$ sur un intervalle P à préciser.
- 5) Calcule $g(1)$, $g(-1 + \sqrt{5})$ et $(g^{-1})'(5)$.
- 6) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 12 — Fonction trigonométrique

Soit $f(x) = \sin 2x + \cos x$.

- 1) Montre que $f(x + 2\pi) = f(x)$ et que $f(\pi - x) = -f(x)$.
- 2) Montre que $f'(x) = -4\sin^2 x - \sin x + 2$. Résous $f'(x) = 0$ sur $[0; \pi]$ (pose $s = \sin x$; on trouve $\sin x = \frac{\sqrt{33}-1}{8}$).
- 3) Dresse le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$ et construis sa courbe.

Exercice 13 — Fonction rationnelle et discussion graphique

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.

- 1) Trouve a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$; montre que $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.
- 2) Étudie f et déduis-en le signe de $f(x)$; étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) .
- 3) Montre que la restriction g de f à $] -\infty; -3]$ est une bijection sur un intervalle J à préciser. Calcule $g(-5)$, $g(-4)$ et $(g^{-1})'(-7)$.
- 4) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe de g^{-1} dans le même repère.
- 5) Démontre que pour tout $x \in [1; 3]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$. On admet que cela entraîne $|f(x) - f(3)| \leq \frac{3}{4}|x - 3|$ (inégalité des accroissements finis) : déduis-en que $\left| x - 4 + \frac{4}{x + 1} \right| \leq \frac{3}{4}|x - 3|$ sur $[1; 3]$.
- 6) Discute graphiquement, suivant m , le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx + 3 - m = 0$.

Exercice 14 — Fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-c\}$ et (H) sa courbe.

- 1) Détermine a, b, c sachant que la droite $x = 3$ est asymptote, que le point $\Omega(3; 2)$ est centre de symétrie de (H) , et que la tangente au point $B(1; -\frac{3}{2})$ a pour coefficient directeur $-\frac{7}{4}$.
- 2) Détermine le point A de (H) d'ordonnée $\frac{1}{4}$ et la pente de la tangente en A .
- 3) Calcule les coordonnées du point d'intersection des tangentes en A et en B .

Exercice 15 — Fonction impaire et asymptote oblique

Soit $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{ax^2 + b}$.

- 1) Trouve a et b sachant que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.
- 2) Montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet un centre de symétrie I à préciser.
- 3) Montre que $f'(x) = \frac{3(x^2 - 1)^2}{(3x^2 + 1)^2}$ et étudie les variations de f .
- 4) Étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique $(D) : y = \frac{x}{3}$; trace $(\mathcal{C}_f)$ et (D) .

Exercice 16 — Fonction définie par son tableau et sa symétrie

Une fonction f a pour courbe $(\mathcal{C}_f)$; la droite $x = 2$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$. On connaît une partie de son tableau de variations :

x	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	0	—	—
$f(x)$	1	$+\infty$	3

- 1) Complète le tableau de variations de f sur son ensemble de définition (utilise la symétrie) et trace l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.
- 2) On suppose $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \gamma}$. Détermine a, b, c, β, γ (on trouve $f(x) = 3 + \frac{8}{x^2 - 4x}$).
- 3) Soit g la restriction de f à $I = [2; 4[$. Montre que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser; donne une équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse 0.
- 4) Discute graphiquement, suivant m , le nombre et le signe des solutions de $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$.

Exercice 17 — Fonction rationnelle et bijection

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3 - x}$.

- 1) Montre que $f(x) = -x - 3 + \frac{4}{3 - x}$ et que $f'(x) = -\frac{(1 - x)(5 - x)}{(3 - x)^2}$; dresse le tableau de variations.
- 2) Donne l'équation de l'asymptote oblique (D) et étudie la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
- 3) Montre que le point W , intersection des asymptotes, est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
- 4) Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse 2.
- 5) Soit g la restriction de f à $] -\infty; 1]$. Montre que g réalise une bijection sur un intervalle J à préciser; calcule $g(-2)$, $g(-3)$ et $(g^{-1})'(\frac{2}{3})$.
- 6) Trace $(\mathcal{C}_f)$ et discute graphiquement, suivant m , le nombre de solutions de $x^2 + mx - 5 - 3m = 0$.

Exercice 18 — Fonction et fonction auxiliaire

Soit $f(x) = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right)$ et $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

- 1) Montre que pour $x \neq 0$, $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
- 2) Étudie g ; montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0 < \alpha < 1$ (on prendra $\alpha \approx \frac{2}{3}$).
- 3) Dresse le tableau de variations de f .
- 4) A et B sont les points de la courbe d'abscisses -1 et 1 . Détermine l'équation de la droite (AB) et vérifie qu'elle est tangente en B à la courbe. Détermine une équation de la tangente (T) en A .
- 5) Montre que $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $] -\infty ; 0[$, construis la courbe et discute graphiquement le nombre de solutions de $f(x) = m$.

Devoir de synthèse — Séquence 7

Études de fonctions

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (10 points) — Fonction rationnelleSoit $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Détermine D_f et les limites aux bornes. (2 pt)
- 2) Montre que $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x - 1}$; déduis-en les asymptotes et la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique. (3 pt)
- 3) Montre que $f'(x) = \frac{2x(x - 2)}{(x - 1)^2}$ et dresse le tableau de variations. (3 pt)
- 4) Montre que $\Omega(1; 1)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$ et trace $(\mathcal{C})$. (2 pt)

Exercice 2 (10 points) — Fonction trigonométriqueSoit $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$.

- 1) Montre que f est impaire et 2π -périodique ; justifie qu'on peut l'étudier sur $[0; \pi]$. (2 pt)
- 2) Montre que $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$. (2 pt)
- 3) Étudie le signe de f' sur $[0; \pi]$ et dresse le tableau de variations ; donne le maximum de f . (3 pt)
- 4) Trace la courbe de f sur $[-\pi; \pi]$ et calcule l'aire du domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur $[0; \pi]$. (3 pt)

Séquence 8

Fonction logarithme népérien et logarithme décimal

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonction logarithme népérien : étude et propriétés ; équations, inéquations ; fonctions $\ln u$; limites de référence ; activités numériques ; logarithme décimal ; applications (pH, décibels, échelles logarithmiques).

L'essentiel à retenir

- $\ln$ est la primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ; elle est strictement croissante ; $\ln e = 1$ ($e \approx 2,718$).
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ ($a, b > 0, n \in \mathbb{Z}$).
- $\ln a = \ln b \iff a = b$; $\ln a < \ln b \iff a < b$; $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$. On détermine toujours d'abord le domaine de validité.
- Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ($u > 0$) ; une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$; une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - x$.
- **Logarithme décimal** : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$; $\log 10^n = n$; $\log x = y \iff x = 10^y$. En chimie, $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$; en acoustique, le niveau sonore est $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (en dB).

Exercices d'application**Exercice 1** — Équations et inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$:

- a) $\ln(2x - 3) = \ln(x + 1)$ b) $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln 4$
- c) $2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0$
- d) $\ln(x + 3) < \ln(5 - x)$ e) $\ln(x^2 - 4) \geq \ln(3x)$
- f) $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \leq 0$

Exercice 2 — Limites

Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$.

Exercice 3 — Dérivées et primitives

- 1) Calcule la dérivée de $f_1(x) = x \ln x$; $f_2(x) = \ln(x^2 + x + 1)$; $f_3(x) = \frac{\ln x}{x^2}$; $f_4(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sur $] -1; 1[$.
- 2) Détermine une primitive de $g_1(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$; $g_2(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$; $g_3(x) = \tan x$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- 3) Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ et, par parties, $\int_1^e x \ln x dx$.

Exercice 4 — Logarithme décimal et pH

- 1) Calcule le pH d'une solution telle que $[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \times 10^{-4} \text{ mol/L}$.
- 2) Un jus de bissap a un pH de 2,8. Calcule sa concentration en ions H_3O^+ .
- 3) On dilue une solution 100 fois. Montre que son pH augmente de 2.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Étude de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- 1) Calcule les limites en 0 et en $+\infty$; interprète graphiquement.
- 2) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations. Dédus-en que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \frac{x}{e}$.
- 3) Compare e^π et π^e (indication : compare $f(e)$ et $f(\pi)$).

Exercice 6 — Étude d'une fonction et position relative

Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

- 1) Étudie les variations de g ; déduis-en le signe de g .
- 2) Calcule les limites de f ; montre que la droite $(D) : y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudie leur position relative.
- 3) Montre que $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$ et, en utilisant $\ln x \leq x - 1$, justifie que f est strictement croissante.

Situations complexes**Situation complexe 8.1** Logarithme décimal · niveau sonore**Le bruit au carrefour**

1 · Contexte

L'agence de l'environnement de Bamako mesure le bruit au carrefour de l'Hippodrome, très fréquenté par les motos aux heures de pointe.

2 · Support

Niveau sonore : $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (en décibels, dB), où I est l'intensité du son et I_0 l'intensité de référence. Une moto seule produit un niveau de 80 dB à 5 m. Les intensités de plusieurs sources s'ajoutent. Au-delà de 85 dB, une exposition prolongée est dangereuse pour l'audition.

3 · Fonction

Tu es le technicien de l'agence. Tu dois évaluer le risque pour les agents de la circulation.

4 · Consignes

- 1 Calcule l'intensité I d'une moto en fonction de I_0 .
- 2 Calcule le niveau sonore produit par 10 motos, puis par 50 motos.
- 3 Détermine le nombre minimal de motos qui fait dépasser le seuil de 85 dB, et donne un conseil.

Situation complexe 8.2 Logarithme népérien · étude de fonction**La croissance d'un baobab****1 · Contexte**

Le service des eaux et forêts suit la croissance des jeunes baobabs plantés dans une forêt classée près de Kita.

2 · Support

La hauteur d'un baobab de t années est modélisée par $h(t) = 2 \ln(t + 1) + 0,5$ (en m), pour $0 \leq t \leq 50$. On juge l'arbre adulte lorsqu'il dépasse 7 m.

3 · Fonction

Tu es l'agent forestier. Tu dois présenter le rythme de croissance des baobabs.

4 · Consignes

- 1 Calcule $h(0)$, $h(10)$ et $h(50)$; étudie le sens de variation de h .
- 2 Calcule $h'(t)$ et interprète-la comme une vitesse de croissance ; compare les vitesses à 1 an et à 20 ans.
- 3 Détermine l'âge à partir duquel un baobab est jugé adulte (à l'année près).

Exemple résolu : tableaux de variations et courbe

Exemple résolu — fonction auxiliaire et fonction logarithme

Énoncé. Soit $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$ et $f(x) = x - 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudie g , puis f , et trace la courbe de f .

1. Étude de g et signe

$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, du signe de $x-1$ sur $]0; +\infty[$. Le minimum est $g(1) = 3 > 0$, donc $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

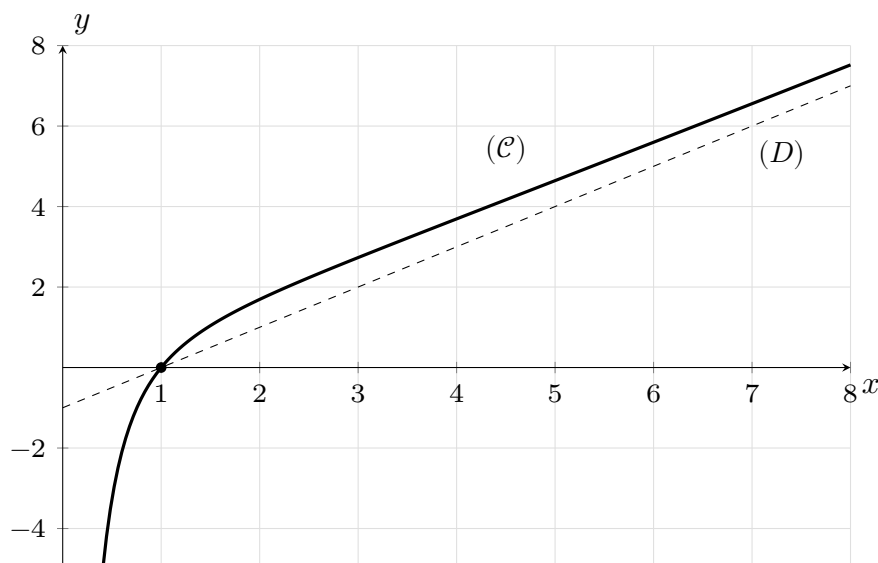
2. Limites, dérivée et variations de f

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$ (asymptote $x = 0$); $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. $f'(x) = 1 + \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$: f est strictement croissante.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ +	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. Asymptote oblique et position

$f(x) - (x - 1) = \frac{2 \ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$: $(D) : y = x - 1$ est asymptote. La courbe est au-dessous de (D) sur $]0; 1[$, la coupe en $(1; 0)$ et est au-dessus sur $]1; +\infty[$.



Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)

Exercice 7 — Trinôme et logarithme

Soit $t(x) = 2x^2 - x - 1$.

- 1) Résous $t(x) = 0$ et factorise $E(x) = 2(\ln x)^2 - \ln x - 1$.
- 2) Résous $2(\ln x)^2 \leq \ln x + 1$, puis $\ln x + \ln(2x - 1) > 0$.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écris sans exposant : $\ln(9 \times 5^n) - \ln(25^n)$ et $\ln\left(\frac{4}{2^{n-1}}\right) + \ln(8^n)$.

Exercice 8 — Équations et système

- 1) Résous $2 \ln x = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$.
- 2) Résous $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = 2 \ln(x + 1)$, puis $\ln(x^2 - 4) = \ln(1 - 4x)$.
- 3) Résous le système
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases}.$$

Exercice 9 — Ensembles de définition et transformation de courbe

- 1) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$.
- 2) Détermine l'ensemble de définition de $f(x) = \ln(x + 3)$, $g(x) = x^2 \ln(-x^2 + 6x - 5)$ et $h(x) = x \ln\left(\frac{x + 2}{1 - x}\right)$.
- 3) Soit $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \ln(x + 2) + 1$. Écris $v(x)$ à l'aide de u et interprète géométriquement (translation). Dédus le tableau de variations de v de celui de u .

Exercice 10 — Fonction logarithme définie par des conditions

Soit $f(x) = \ln(ax + b)$.

- 1) Détermine a et b sachant que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \frac{3}{4}$; précise alors D_f .
- 2) Détermine a et b sachant que la courbe passe par $A(2; 0)$ et que la tangente en A a pour coefficient directeur -2 .

Exercice 11 — Fonction rationnelle, réciproque et fonction $x^2 \ln x$

A. Soit $h(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$.

- 1) Étudie les variations de h , trace sa courbe et trouve une primitive de h sur $]0; +\infty[$.
- 2) Montre que la restriction de h à $]0; 1[$ admet une fonction réciproque, et détermine-la.

B. Soit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- 3) Étudie les variations de f (on trouve $f'(x) = -x \ln x$).
- 4) Montre que $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $[1; 2]$ et calcule sa valeur exacte.
- 5) Trace la courbe de f (unité 2 cm).

Exercice 12 — Prolongement par continuité et fonction $x(\ln x)^2$

A. Soit $f(x) = 1 + x - 3x \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- 1) Montre que f se prolonge par continuité en 0 ; on note g ce prolongement. Étudie la dérivabilité de g en 0.
- 2) Étudie les variations de g (on prendra $e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,5$) ; montre que $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $[1; 2]$.
- 3) Étudie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et déduis-en le comportement de la courbe ; trace-la.

B. Soit $h(x) = x(\ln x)^2$ si $x > 0$ et $h(0) = 0$.

- 4) Étudie le signe de $h'(x) = \ln x(\ln x + 2)$; montre que h n'est pas dérivable en 0 et précise la demi-tangente en 0.
- 5) Donne une équation de la tangente au point d'abscisse e et trace la courbe de h .
- 6) Soit $G(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x(\ln x - 1)$. Calcule $G'(x)$ et déduis-en une primitive de h .
- 7) Calcule l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine compris entre la courbe de h , l'axe des abscisses et les droites $x = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$) et $x = 1$, puis $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$.

Exercice 13 — Intégrales et équations

- 1) Calcule $I = \int_{\ln 3}^{\ln 4} (1 - e^x) dx$, $J = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx$ et $K = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx$.
- 2) Résous $(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 = 0$.

Exercice 14 — Étude d'une fonction logarithme

Soit $f(x) = -x^2 + 5x - 5 \ln(x+1)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe (unité 2 cm).

- 1) Détermine D_f et les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Montre que $f'(x) = \frac{x(3-2x)}{x+1}$ et dresse le tableau de variations de f .
- 3) Montre que $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ dans $[2; 3]$; donne une valeur approchée de ℓ à 0,01 près.
- 4) Trace $(\mathcal{C}_f)$.

Devoir de synthèse — Séquence 8

Logarithme népérien et logarithme décimal

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Équations et inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$: $\ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln(x+7)$; $(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 = 0$; $\ln(3-x) \leq \ln(2x+1)$.
(6 pt)

Exercice 2 (4 points) — pH et logarithme décimal

- 1) Calcule le pH d'une solution d'acide où $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5 \times 10^{-3}$ mol/L. (1,5 pt)
- 2) Une eau de puits a un pH de 6,5. Calcule $[\text{H}_3\text{O}^+]$. (1,5 pt)
- 3) De combien varie le pH quand la concentration est divisée par 1 000 ? (1 pt)

Exercice 3 (10 points) — Étude de $x \mapsto x \ln x - x$

Soit $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0; +\infty[$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. (2 pt)
- 2) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations de f . (2 pt)
- 3) Résous $f(x) = 0$; détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e. (2 pt)
- 4) Trace (T) et $(\mathcal{C})$. (2 pt)
- 5) Dédus de ce qui précède la valeur de $\int_1^e \ln x \, dx$. (2 pt)

Séquence 9

Fonction exponentielle et fonctions puissances

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Fonction exponentielle népérienne (réciproque de $\ln$) : propriétés, étude, limites ; fonctions e^u ; activités numériques ; fonctions $x \mapsto a^x$ et fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$; applications aux problèmes économiques et biologiques.

L'essentiel à retenir

- $y = e^x \iff x = \ln y$ ($y > 0$) ; $e^x > 0$; $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $(e^a)^n = e^{na}$; $e^a < e^b \iff a < b$.
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u' e^u$; une primitive de $u' e^u$ est e^u .
- Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
À l'infini, l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de x .
- $a^x = e^{x \ln a}$ ($a > 0$) : croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$. Pour $x > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- Croissance exponentielle : $N(t) = N_0 e^{kt}$; temps de doublement $T = \frac{\ln 2}{k}$. Décroissance : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; demi-vie $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Exercices d'application**Exercice 1** — Équations, inéquations, systèmes

Résous dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$:

a) $e^{2x-1} = 3$ b) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

c) $e^x + 2e^{-x} = 3$ d) $e^{x^2} \leq e^{x+2}$

e) $3e^{2x} - e^x - 2 > 0$

f) $\begin{cases} e^x e^y = e^5 \\ e^x - 2e^y = e^2(e-2) \end{cases}$ (vérifie que $(3; 2)$ convient)

g) $2^{x+1} = 5^x$

Exercice 2 — Limites

Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Exercice 3 — Étude d'une fonction

Soit $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$; interprète.
- 2) Montre que $f'(x) = -xe^{-x}$ et dresse le tableau de variations.
- 3) Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse -1 et trace $(\mathcal{C})$.
- 4) Montre que $F(x) = -(x+2)e^{-x}$ est une primitive de f et calcule l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 4 — Fonctions puissances

- 1) Écris 2^x , $(\frac{1}{2})^x$ et $x^{\sqrt{2}}$ à l'aide de l'exponentielle et calcule leurs dérivées.
- 2) Étudie le sens de variation de $g(x) = x^{0,75}$ sur $]0; +\infty[$ et compare $g(x)$ et x pour $x > 1$.
- 3) Résous l'inéquation $1,03^n \geq 2$ et interprète en termes de doublement d'une population qui croît de 3 % par an.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Fonction logistique

Soit $f(t) = \frac{10}{1 + 9e^{-0,5t}}$ pour $t \geq 0$ (population d'insectes, en milliers).

- 1) Calcule $f(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$; interprète.
- 2) Montre que $f'(t) = \frac{45e^{-0,5t}}{(1 + 9e^{-0,5t})^2}$ et déduis-en le sens de variation de f .
- 3) Détermine l'instant où la population atteint 5 000 insectes, puis 9 000 insectes.

Exercice 6 — Une inégalité classique

Soit $\varphi(x) = e^x - x - 1$. Étudie les variations de φ et déduis-en que $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . Interprète graphiquement.

Situations complexes**Situation complexe 9.1** Croissance exponentielle · logarithme**Le lait caillé et les bactéries****1 · Contexte**

Une laiterie de Sévaré sensibilise les vendeuses de lait au respect de la chaîne du froid. Le lait non réfrigéré se contamine rapidement.

2 · Support

Dans un litre de lait laissé à 35 °C, le nombre de bactéries t heures après la traite est $N(t) = 1\,000 e^{0,35t}$. Au-delà d'un million de bactéries par litre, le lait est impropre à la consommation. La traite a lieu à 6 h.

3 · Fonction

Tu es le technicien qualité de la laiterie. Tu dois fixer l'heure limite de vente du lait non réfrigéré.

4 · Consignes

- ❶ Calcule le nombre de bactéries 4 h puis 10 h après la traite.
- ❷ Détermine le temps de doublement de la population de bactéries.
- ❸ Détermine l'heure à partir de laquelle le lait est impropre à la consommation, et propose une heure limite de vente avec une marge de sécurité.

Situation complexe 9.2 Fonctions puissances · loi biologique**La ration des animaux du troupeau****1 · Contexte**

Un vétérinaire de Ségou explique aux éleveurs que les besoins en énergie d'un animal ne sont pas proportionnels à sa masse.

2 · Support

Loi de Kleiber : un animal de masse M (en kg) a besoin chaque jour de $E(M) = 70 M^{0,75}$ kilocalories (kcal). Un bœuf pèse 400 kg et un mouton 40 kg.

3 · Fonction

Tu es l'assistant du vétérinaire. Tu dois comparer les besoins d'un bœuf et d'un mouton.

4 · Consignes

- ❶ Calcule les besoins journaliers d'un bœuf et d'un mouton (à 1 kcal près).
- ❷ Calcule les besoins par kilogramme de masse pour chaque animal. Lequel a les plus grands besoins par kilogramme ?
- ❸ Montre que si la masse est multipliée par 10, les besoins sont multipliés par $10^{0,75}$; calcule ce coefficient et commente.

Exemples résolus : tableaux de variations et courbes**Exemple résolu — concentration d'une substance injectée**

Énoncé. On injecte une substance dans le sang d'un animal. La concentration à l'instant t (en s) est $f(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. Étudie f et réponds aux questions pratiques.

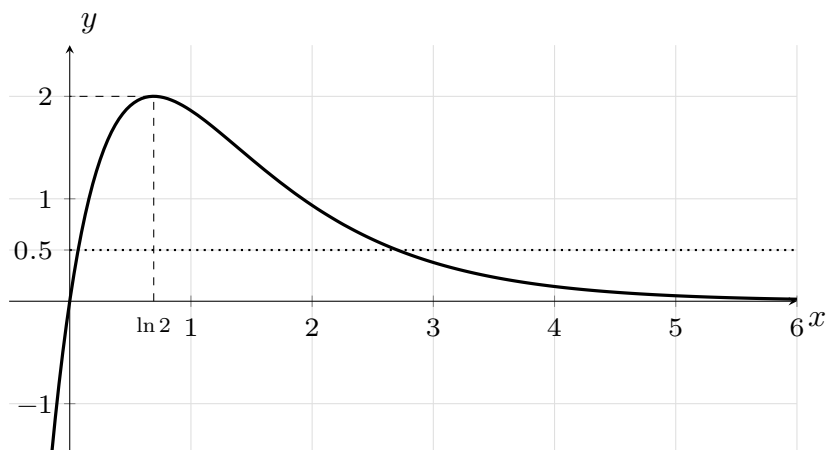
1. Dérivée

$f(t) = \frac{8(e^t - 1)}{e^{2t}}$ et $f'(t) = 8(-e^{-t} + 2e^{-2t}) = \frac{8(2 - e^t)}{e^{2t}}$, du signe de $2 - e^t$: positif si $t < \ln 2$, négatif si $t > \ln 2$.

2. Limites et tableau

$\lim_{t \rightarrow -\infty} f = -\infty$ (car $-e^{-t}$ l'emporte) ; $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = 0$. Maximum : $f(\ln 2) = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2$.

t	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	2	0



3. Interprétation

La concentration est maximale au bout de $\ln 2 \approx 0,69$ s et vaut 2. Elle retombe au quart du maximum, soit 0,5, quand $e^{-t} - e^{-2t} = \frac{1}{16}$: avec $X = e^{-t}$, $X^2 - X + \frac{1}{16} = 0$, d'où $X = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$. Après le maximum, $X = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, soit $t = \ln \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \approx 2,70$ s. Enfin $f(9) \approx 9,9 \times 10^{-4}$ et f décroît sur $[\ln 2; +\infty[$: pour $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3} .

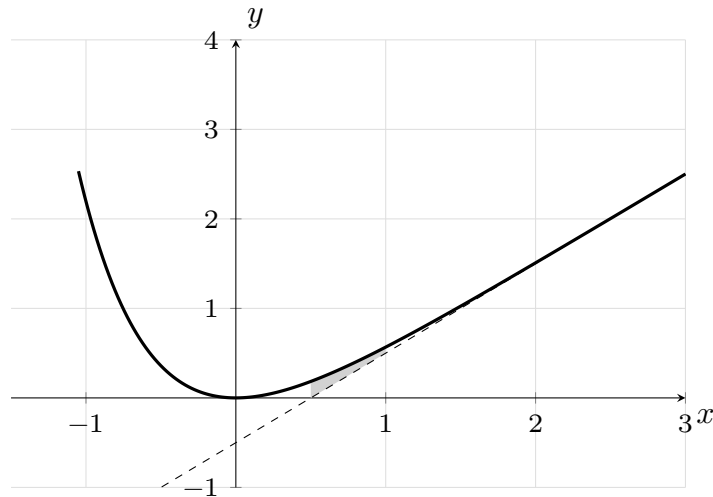
Exemple résolu — fonction exponentielle avec asymptote oblique

Énoncé. Étudie $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ et calcule l'aire entre sa courbe et son asymptote sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

1. Variations

$f'(x) = 1 - e^{-2x}$: négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$; minimum $f(0) = 0$. En $+\infty$: $e^{-2x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$ et $(D) : y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote, la courbe étant au-dessus de (D) ($f(x) - (x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-2x} > 0$). En $-\infty$: $f(x) = e^{-2x} (\frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})e^{2x}) \rightarrow +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

**2. Aire**

$$\mathcal{A} = \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{4} (e^{-1} - e^{-2}) \approx 0,058 \text{ u.a.}$$

Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)**Exercice 7** — Équations, systèmes et intégrales

- 1) Résous : a) $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$; b) $2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 = 0$; c) $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln 6 \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$.
- 2) Calcule $I = \int_1^2 x \ln(x^4) dx$ et $K = \int_1^2 \left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln x \right) dx$ (dérive $e^x \ln x$).
- 3) Détermine l'ensemble de définition et les limites aux bornes de $f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$ et $g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$.

Exercice 8 — Équations exponentielles

- 1) Résous : $e^{2x} - 2e^x - 8 = 0$; $e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x = 0$; $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$.
- 2) Résous $e^{\sin x} - 2e^{-\sin x} = 1$ (on donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\sin 0,766 \approx 0,69$).
- 3) Résous le système $\begin{cases} e^x \times e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} \times e^y = e \end{cases}$.
- 4) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ (écris-la sous forme exponentielle).

Exercice 9 — Équation et inéquations

- 1) Résous $\ln(\ln e^{2x} - e^{-\ln x}) = 2 - \ln x$.
- 2) Résous le système d'inéquations $\begin{cases} \ln(x-1) + \ln(x+2) < 2\ln(2x+1) \\ e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0 \end{cases}$ (pour la seconde, multiplie par e^x et factorise par $e^x - e^2$).

Exercice 10 — Fonction exponentielle et suite

- 1) Calcule par parties $I = \int_0^1 (x+2)e^x dx$.
- 2) Soit $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$. Calcule U_1, U_2, U_3 . On pose $V_n = aU_n + 3$ ($a \neq 0$) : détermine a pour que (V_n) soit géométrique, exprime U_n en fonction de n et calcule $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

Exercice 11 — Étude d'une fonction exponentielle et aire

Soit $f(x) = 1 - x + e^{-2x} + xe^{-2x}$ sur $[0; +\infty[$.

- 1) Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$; dresse le tableau de variations de f' et déduis-en le signe de $f'(x)$.
- 2) Dresse le tableau de variations de f .
- 3) Montre que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) et précise la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
- 4) Donne le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0.
- 5) Montre que $f(x) = 0$ admet une solution unique ℓ et que $1 \leq \ell \leq 2$.
- 6) Trace $(\mathcal{C}_f)$ (unité 2 cm) et calcule en cm^2 l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$, (D) et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 12 — Fonction exponentielle et première bissectrice

Soit $h(x) = x - e^x$.

- 1) Calcule les limites de h ; montre que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.
- 2) Étudie les variations de h ; étudie la position de la courbe par rapport à (Δ) et trace-la.

Exercice 13 — Fonction exponentielle impaire

Soit $f(x) = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

- 1) Montre que $f'(x) = \frac{1 + e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$ et dresse le tableau de variations de f .
- 2) Montre que les droites $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3) Détermine la tangente (T) au point d'abscisse 0 et montre que O est centre de symétrie.
- 4) Trace la courbe et (T) (unité 1 cm) ; calcule l'aire du domaine défini par $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$ (écris $\frac{1-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{2e^x}{1+e^x}$).

Exercice 14 — Situation : le prix d'une voiture et le salaire

Le 1^{er} janvier 2020, une voiture coûte 15 000 000 F ; son prix augmente de 10 % par an. Le salaire mensuel d'un technicien est de 900 000 F ; il augmente de 15 % par an.

- 1) On note V_n le prix de la voiture et W_n le salaire mensuel au 1^{er} janvier 2020 + n . Précise la nature de ces suites et exprime-les en fonction de n .
- 2) À partir de quelle année 10 mois de salaire suffiront-ils pour acheter la voiture ? (On donne $\ln 5 \approx 1,609$; $\ln 3 \approx 1,099$; $\ln 1,15 \approx 0,140$; $\ln 1,1 \approx 0,095$.)

Exercice 15 — Famille de fonctions

Pour tout réel m , soit $f_m(x) = (x + 1)e^{mx}$ et (C_m) sa courbe.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B .
- 2) Étudie les variations de f_1 et de f_{-1} ; trace (C_1) et (C_{-1}) (unité 2 cm).
- 3) Donne une équation de la tangente à (C_1) au point d'abscisse 0.
- 4) Calcule en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_1) , (C_{-1}) et les droites $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 16 — Étude de $(x + 2)e^{-x}$ et aire

Soit $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ (unité 1 cm).

- 1) Détermine les limites de f , calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations.
- 2) Donne une équation de la tangente (T_1) au point d'abscisse -2 et de la tangente (T_2) au point d'abscisse 0.
- 3) Calcule les ordonnées des points d'abscisse 1 de $(\mathcal{C}_f)$ et de (T_2) ; trace $(\mathcal{C}_f)$ et (T_2) .
- 4) Calcule en cm^2 l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$, (T_2) , l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 4$.

Devoir de synthèse — Séquence 9

Fonction exponentielle et fonctions puissances

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Équations et inéquationsRésous dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$; $e^x - 6e^{-x} \geq 1$; $3^x = 2^{x+1}$. (5 pt)**Exercice 2** (10 points) — Étude d'une fonctionSoit $f(x) = (2 - x)e^x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (2 pt)
- 2) Montre que $f'(x) = (1 - x)e^x$ et dresse le tableau de variations. (2,5 pt)
- 3) Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse 0 et les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec les axes. (2 pt)
- 4) Trace $(\mathcal{C})$. (1,5 pt)
- 5) Vérifie que $F(x) = (3 - x)e^x$ est une primitive de f et calcule l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$. (2 pt)

Exercice 3 (5 points) — Situation : la culture de bactériesAu laboratoire de l'INRSP de Bamako, une culture compte $N(t) = 500e^{0,2t}$ bactéries au bout de t heures.

- 1) Calcule le nombre de bactéries au bout de 10 heures. (1,5 pt)
- 2) Détermine le temps de doublement de la culture. (1,5 pt)
- 3) Au bout de combien d'heures la culture dépasse-t-elle 100 000 bactéries ? (2 pt)

Séquence 10

Équations différentielles

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Notion d'équation différentielle ; résolution des équations $f' + kf = 0$ et $f'' + kf = 0$ (k constante réelle) ; solution vérifiant des conditions initiales ; applications (radioactivité et datation, refroidissement, croissance, oscillations).

L'essentiel à retenir

- Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue f et ses dérivées. Résoudre, c'est trouver toutes les fonctions qui la vérifient.
- $f' + kf = 0$ (ou $y' = -ky$) : les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $f(x) = C e^{-kx}$, $C \in \mathbb{R}$. Avec la condition $f(x_0) = y_0$: $f(x) = y_0 e^{-k(x-x_0)}$.
- $f'' + \omega^2 f = 0$ ($k = \omega^2 > 0$) : les solutions sont $f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ ($A, B \in \mathbb{R}$), que l'on peut écrire $f(x) = R \cos(\omega x - \varphi)$. Les conditions $f(0)$ et $f'(0)$ déterminent $A = f(0)$ et $B = \frac{f'(0)}{\omega}$. Ce sont des fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{\omega}$.
- $f'' - \omega^2 f = 0$ ($k = -\omega^2 < 0$) : les solutions sont $f(x) = A e^{\omega x} + B e^{-\omega x}$; pour $k = 0$: $f(x) = Ax + B$.
- Équation $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : on se ramène au cas précédent en posant $z = y + \frac{b}{a}$ (alors $z' = az$).

Exercices d'application

Exercice 1 — Équations du premier ordre

Résous les équations différentielles suivantes, puis détermine la solution vérifiant la condition donnée : a) $y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$; b) $2y' - y = 0$, $y(2) = e$; c) $y' = -0,05y$, $y(0) = 200$; d) $3y' + y = 0$, $y(3) = 1$.

Exercice 2 — Équations du second ordre

Résous et détermine la solution particulière : a) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; b) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\frac{1}{2}) = 3$; c) $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; d) $4y'' + y = 0$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

Exercice 3 — Mise sous la forme $R \cos(\omega x - \varphi)$

La solution de l'exercice 2 a) est $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$. Montre que $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; précise sa période et son amplitude.

Exercice 4 — Équation $y' = ay + b$

Soit l'équation (E) : $y' = -2y + 6$.

- 1) Détermine la fonction constante solution de (E).
- 2) On pose $z = y - 3$. Montre que $z' = -2z$; déduis-en les solutions de (E) et la solution telle que $y(0) = 1$. Quelle est sa limite en $+\infty$?

Exercices d'approfondissement

Exercice 5 — Reconnaître une équation

- 1) Détermine une équation différentielle du type $y'' + ky = 0$ dont $f(x) = 3 \cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$ est solution.
- 2) Détermine une équation du type $y' + ky = 0$ dont la solution g vérifie $g(0) = 50$ et $g(10) = 25$; exprime $g(x)$.

Exercice 6 — Croissance d'une population de poissons

Dans un étang piscicole, le nombre de tilapias $N(t)$ (t en mois) vérifie $N' = 0,2N$ et $N(0) = 500$. Exprime $N(t)$, calcule la population après un an et détermine au bout de combien de mois elle aura triplé.

Situations complexes

Situation complexe 10.1 Équation $f' + kf = 0$ · demi-vie · datation

L'âge de la statuette de Djenné

1 · Contexte

Des archéologues ont découvert, près de Djenné-Djenno, une statuette en terre cuite contenant des restes végétaux. Ils veulent la dater par la méthode du carbone 14.

2 · Support

Le nombre $N(t)$ de noyaux de carbone 14 d'un échantillon vérifie $N'(t) + \lambda N(t) = 0$ (t en années). La demi-vie du carbone 14 est de 5 730 ans. L'échantillon de la statuette contient 92 % du carbone 14 d'un échantillon actuel identique.

3 · Fonction

Tu es l'assistant du laboratoire de datation. Tu dois estimer l'âge de la statuette.

4 · Consignes

- 1 Résous l'équation différentielle et exprime $N(t)$ en fonction de $N_0 = N(0)$ et de λ .
- 2 Montre que $\lambda = \frac{\ln 2}{5\,730}$ et calcule sa valeur approchée.
- 3 Détermine l'âge de la statuette (à 10 ans près) et le siècle de sa fabrication.

Situation complexe 10.2 Équation $y' = ay + b$ · refroidissement

Le thé à la menthe qui refroidit

1 · Contexte

Sous l'arbre à palabres, les jeunes du grin préparent le thé (« ataya »). Ils veulent savoir combien de temps attendre avant de boire le premier verre.

2 · Support

D'après la loi de Newton, la température $\theta(t)$ du thé (t en minutes) vérifie $\theta' = -k(\theta - 30)$, où 30°C est la température de l'air. Le thé est servi à 90°C ; 5 minutes plus tard, il est à 70°C . On boit le thé confortablement à 45°C .

3 · Fonction

Tu es l'élève de Terminale du grin. Tu dois calculer le temps d'attente.

4 · Consignes

- ❶ On pose $f(t) = \theta(t) - 30$. Montre que $f' + kf = 0$ et exprime $\theta(t)$ en fonction de t et de k .
- ❷ Détermine k à 10^{-4} près à l'aide de la mesure faite après 5 minutes.
- ❸ Détermine au bout de combien de temps le thé atteint 45°C , et la température du thé en $+\infty$.

Exemples résolus : solutions et courbes**Exemple résolu — refroidissement du thé et courbe solution**

Énoncé. La température du thé vérifie $\theta' = -k(\theta - 30)$ avec $\theta(0) = 90$ et $\theta(5) = 70$ (t en minutes). Détermine $\theta(t)$, son tableau de variations et sa courbe.

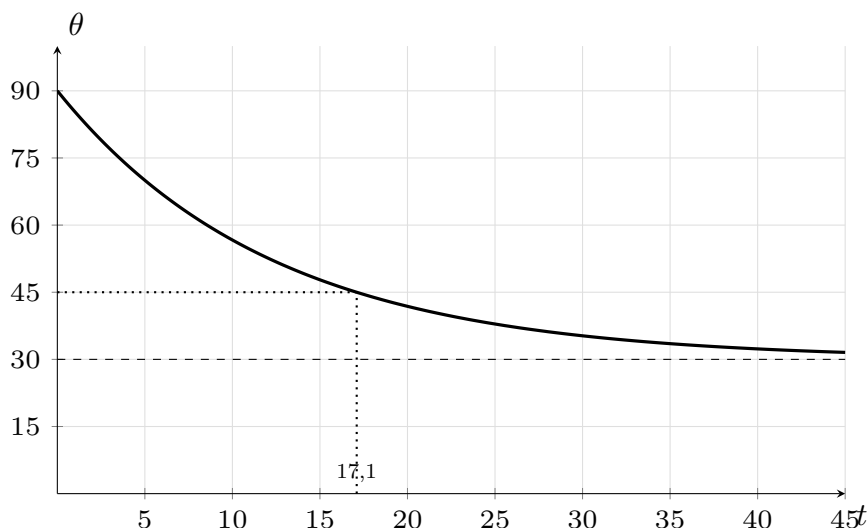
1. Résolution

Avec $f = \theta - 30$: $f' + kf = 0$, donc $f(t) = Ce^{-kt}$; $f(0) = 60$ donne $C = 60$: $\theta(t) = 30 + 60e^{-kt}$.
 $\theta(5) = 70 \iff e^{-5k} = \frac{2}{3} \iff k = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2} \approx 0,0811$.

2. Variations

$\theta'(t) = -60ke^{-kt} < 0$: θ décroît de 90 vers 30 ; la droite $y = 30$ est asymptote horizontale.

t	0	$+\infty$
$\theta'(t)$	—	
$\theta(t)$	90	30

**3. Lecture**

$\theta(t) = 45 \iff e^{-kt} = \frac{1}{4} \iff t = \frac{\ln 4}{k} \approx 17,1$ min : le thé se boit environ 17 minutes après avoir été servi.

Exemple résolu — oscillation $y'' + 4y = 0$

Énoncé. Détermine la solution f de $y'' + 4y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2\sqrt{3}$, puis trace sa courbe.

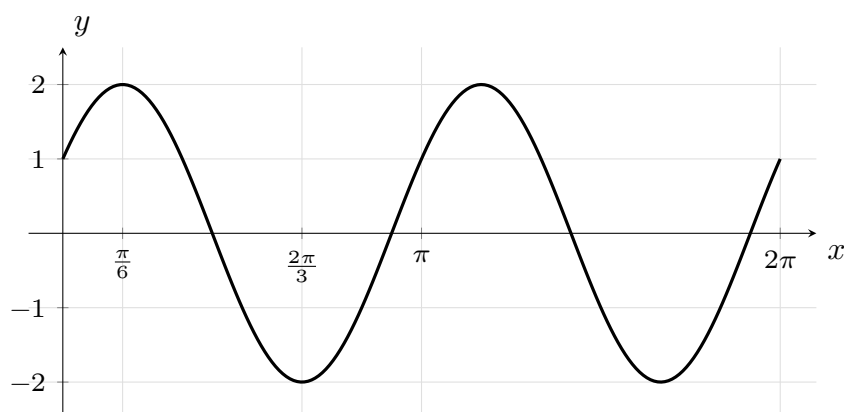
1. Solution

$f(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$ avec $A = f(0) = 1$ et $B = \frac{f'(0)}{2} = \sqrt{3}$: $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

2. Variations sur une période $[0; \pi]$

$f'(x) = -4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Maximum 2 en $\frac{\pi}{6}$, minimum -2 en $\frac{2\pi}{3}$; f s'annule en $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	π		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	1	2	-2	1		



Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)

Exercice 7 — Une équation du second ordre à racine double — approfondissement

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 4y = 0$. On admet que ses solutions sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

- 1) Vérifie que $x \mapsto (Ax + B)e^{2x}$ est bien solution de (E) .
- 2) Détermine la solution f dont la courbe passe par $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3.
- 3) Étudie et représente f ; calcule $\int_{-1}^0 f(x) dx$ par parties.

Exercice 8 — Concentration d'une substance injectée

A. Soit $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$ (unités : 4 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

- 1) Démontre que $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$ et $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$; déduis-en le signe de $f'(x)$.
- 2) Détermine les limites de f , dresse son tableau de variations et représente f .

B. On injecte une substance dans le sang d'un animal; à l'instant t (en secondes), sa concentration est $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$.

- 3) Vérifie que y est solution de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$ (*question d'approfondissement*).
- 4) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale? Au bout de combien de temps retombe-t-elle au quart de sa valeur maximale?
- 5) Donne une valeur approchée de $f(9)$ et montre que pour $t \geq 9$ la concentration est inférieure à 10^{-3} .

Devoir de synthèse — Séquence 10

Équations différentielles

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Premier ordre

- 1) Résous $y' + 3y = 0$ et détermine la solution telle que $y(0) = 2$. (2 pt)
- 2) Résous $2y' - 5y = 0$ et détermine la solution telle que $y(2) = 1$. (2 pt)
- 3) Résous $y' = -y + 4$ et détermine la solution telle que $y(0) = 0$; donne sa limite en $+\infty$. (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Second ordre

- 1) Résous $y'' + 9y = 0$ et détermine la solution f telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -6$. (3 pt)
- 2) Montre que $f(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; donne sa période et son amplitude. (3 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : l'élimination d'un médicament

Un enfant reçoit au CSCOM une injection d'antipaludique. La concentration $C(t)$ du médicament dans le sang (t en heures) vérifie $C' + kC = 0$, avec $C(0) = 12$ mg/L. La concentration diminue de moitié toutes les 4 heures.

- 1) Exprime $C(t)$ en fonction de k et t . (2 pt)
- 2) Montre que $k = \frac{\ln 2}{4}$ et calcule $C(6)$. (3 pt)
- 3) Le médicament n'est plus efficace en dessous de 1,5 mg/L. Au bout de combien de temps faut-il refaire une injection ? (3 pt)

Unité d'apprentissage 3

UA3

Suites numériques · Systèmes linéaires · Dénombrement · Statistique · Probabilités

Séquence 11

Suites numériques

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Étude de suites récurrentes ; suites arithmétiques et géométriques (rappels et applications pratiques) ; convergence sur des exemples ; théorèmes complémentaires (suites majorées, minorées, monotones, limite infinie, comparaison).

L'essentiel à retenir

- Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$, $u_n = u_0 + nr$; somme de termes consécutifs = $\frac{(\text{nombre de termes})(\text{premier} + \text{dernier})}{2}$.
- Suite géométrique : $u_{n+1} = qu_n$, $u_n = u_0 q^n$; somme = premier $\times \frac{1 - q^N}{1 - q}$ (N termes, $q \neq 1$). Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$; si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$.
- (u_n) est majorée par M si $u_n \leq M$ pour tout n ; minorée par m si $u_n \geq m$. Toute suite **croissante et majorée** (ou décroissante et minorée) **converge**.
- Comparaison : si $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$; si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $v_n, w_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$.
- Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$: si elle converge vers ℓ et si f est continue, alors $\ell = f(\ell)$.
- Suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$) : avec $\ell = \frac{b}{1 - a}$, la suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a .
- Raisonnement par récurrence : on vérifie la propriété au rang initial, puis on montre que si elle est vraie au rang n , elle l'est au rang $n + 1$.

Exercices d'application**Exercice 1** — Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

- 1) (u_n) est arithmétique avec $u_4 = 17$ et $u_{12} = 41$. Calcule r , u_0 et $u_0 + u_1 + \dots + u_{30}$.
- 2) (v_n) est géométrique avec $v_1 = 6$ et $v_4 = 162$. Calcule q , v_0 et $v_0 + \dots + v_7$.
- 3) Calcule $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ et sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 — Sens de variation et limites

Étudie le sens de variation et la limite des suites définies par :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \quad v_n = n^2 - 5n \quad w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$$

$$t_n = \frac{\sin n}{n+1} \quad (n \geq 0)$$

Exercice 3 — Suite arithmético-géométrique

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

- 1) Calcule u_1, u_2, u_3 . La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 2) On pose $v_n = u_n - 6$. Montre que (v_n) est géométrique ; exprime v_n puis u_n en fonction de n .
- 3) Dédus-en la limite de (u_n) et calcule $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 4 — Suite récurrente et récurrence

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- 1) Montre par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 2$.
- 2) Montre par récurrence que (u_n) est croissante.
- 3) Dédus-en que (u_n) converge et détermine sa limite.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Suite homographique

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$. On pose $w_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.

- 1) Calcule u_1 et u_2 . Montre que (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$.
- 2) Exprime w_n puis u_n en fonction de n et déduis-en la limite de (u_n) .

Exercice 6 — Suite définie par une intégrale

Pour $n \geq 1$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- 1) Montre que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déduis-en la limite de (I_n) .
- 2) Calcule $I_n + I_{n+1}$ et étudie le sens de variation de (I_n) .

Situations complexes**Situation complexe 11.1** Suite arithmético-géométrique · limite**Le traitement par injections****1 · Contexte**

Un malade hospitalisé au CHU du Point G reçoit chaque jour une injection d'un antibiotique. Le médecin veut s'assurer que la quantité dans le sang ne devient pas dangereuse.

2 · Support

Chaque jour, l'organisme élimine 50 % de l'antibiotique présent, puis on injecte 2 mg. On note u_n la quantité (en mg) présente juste après la n -ième injection : $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.

La quantité devient toxique au-delà de 5 mg.

3 · Fonction

Tu es l'interne du service. Tu dois vérifier que le traitement est sans danger.

4 · Consignes

- ❶ Calcule u_2, u_3, u_4 et montre que la suite $v_n = u_n - 4$ est géométrique.
- ❷ Exprime u_n en fonction de n et détermine la limite de la quantité d'antibiotique.
- ❸ Montre que $u_n < 5$ pour tout n et conclus. Combien d'injections faut-il pour dépasser 3,9 mg ?

Situation complexe 11.2 Suites · convergence · seuil

Les poissons du lac de Sélingué

1 · Contexte

Une coopérative de pêcheurs de Sélingué gère le peuplement d'un bras du lac. Elle veut savoir si la population de poissons peut se stabiliser.

2 · Support

Le 1^{er} janvier 2025, on estime la population à 2 000 poissons d'une espèce. Chaque année, la pêche et la mortalité font disparaître 20 % des poissons, et la reproduction en apporte 1 000. On note p_n la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n .

3 · Fonction

Tu es le conseiller technique de la coopérative. Tu dois prévoir l'évolution de la population.

4 · Consignes

- ❶ Justifie que $p_{n+1} = 0,8p_n + 1\,000$ et calcule p_1 et p_2 .
- ❷ Exprime p_n en fonction de n et détermine la limite de (p_n) . Interprète.
- ❸ Détermine l'année à partir de laquelle la population dépassera 4 900 poissons.

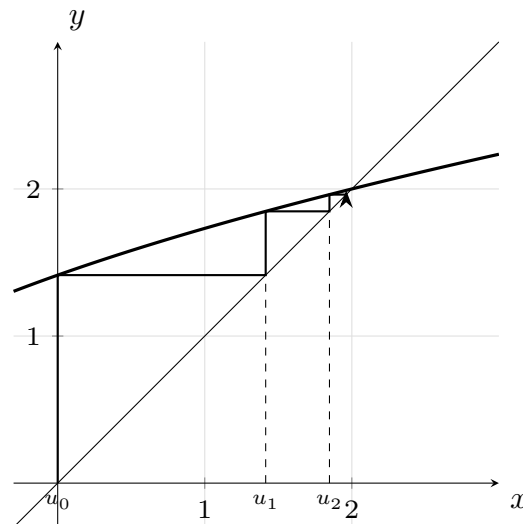
Exemple résolu : représentation graphique d'une suite récurrente

Exemple résolu — suite $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

Énoncé. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2 + x}$. Représente les premiers termes, conjecture puis démontre la convergence.

1. Construction graphique (« escalier »)

On trace la courbe de f et la droite $y = x$. Partant de u_0 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe (ordonnée u_1), puis on revient sur la droite $y = x$ pour reporter u_1 en abscisse, et ainsi de suite. Les termes semblent croître vers l'abscisse du point d'intersection, $\ell = 2$.



2. Démonstration

Par récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ (car f est croissante et $f(2) = 2$). La suite est croissante et majorée, donc convergente ; sa limite ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2 + \ell}$ et $\ell \geq 0$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0 : \ell = 2$.

Problèmes de synthèse (recueil de devoirs)

Exercice 7 — Suite auxiliaire géométrique (1)

Soit (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$.

- 1) Calcule U_1, U_2, U_3 .
- 2) On pose $V_n = aU_n + 3$ ($a \in \mathbb{R}^*$). Exprime V_{n+1} en fonction de U_n et détermine a pour que (V_n) soit géométrique.
- 3) Exprime V_n puis U_n en fonction de n ; calcule $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et les limites de (U_n) et (S_n) .

Exercice 8 — Suite auxiliaire géométrique (2)

Soit (V_n) définie par $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = \frac{V_n - 2n - 3}{2}$.

- 1) Calcule V_1, V_2, V_3 .
- 2) Soit $W_n = V_n + 2n - 1$. Montre que (W_n) est géométrique ; précise sa raison q et son premier terme W_0 .
- 3) Exprime W_n puis V_n en fonction de n .
- 4) Calcule $K_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.

Exercice 9 — Suites géométriques et comparaison

Le prix d'un tricycle est de 2 500 000 F au 1^{er} janvier 2020 et augmente de 10 % par an. Le revenu mensuel d'un livreur est de 150 000 F et augmente de 15 % par an.

- 1) Définis par récurrence les suites (V_n) (prix) et (W_n) (revenu mensuel) ; précise leur nature et leur raison ; calcule V_{10} et V_{11} .

2) À partir de quelle année 10 mois de revenu suffiront-ils pour acheter le tricycle ?

Devoir de synthèse — Séquence 11

Suites numériques

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Suites arithmétiques et géométriques

- 1) (u_n) est arithmétique, $u_2 = 7$ et $u_9 = 28$. Calcule r , u_0 et $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$. (3 pt)
- 2) (v_n) est géométrique de termes positifs, $v_1 = 4$ et $v_3 = 36$. Calcule q , v_0 et $v_0 + v_1 + \dots + v_6$. (3 pt)

Exercice 2 (14 points) — Suite récurrenteSoit (u_n) définie par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$.

- 1) Calcule u_1 , u_2 et u_3 . (1,5 pt)
- 2) Montre par récurrence que pour tout n , $u_n \geq 10$. (2,5 pt)
- 3) Montre que (u_n) est décroissante. Dédus-en qu'elle converge. (2,5 pt)
- 4) Soit $v_n = u_n - 10$. Montre que (v_n) est géométrique ; exprime v_n puis u_n en fonction de n . (3 pt)
- 5) Calcule la limite de (u_n) et vérifie qu'elle est solution de $\ell = 0,6\ell + 4$. (2 pt)
- 6) Calcule $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n . (2,5 pt)

Séquence 12

Systèmes d'équations linéaires

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires ; utilisation d'un tableau (disposition des coefficients) ; méthode du pivot de Gauss ; application à la résolution de problèmes de mise en équation.

L'essentiel à retenir

- Un système linéaire de n équations à p inconnues peut avoir une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution.
- Opérations qui ne changent pas les solutions : échanger deux lignes ; multiplier une ligne par un réel non nul ; remplacer L_i par $L_i + kL_j$ ($j \neq i$).
- **Méthode du pivot de Gauss** : on choisit un coefficient non nul (le pivot) de la première colonne, on élimine cette inconnue dans les autres lignes, puis on recommence sur le système restant jusqu'à obtenir un système **triangulaire**, que l'on résout en remontant.
- **Disposition en tableau** : on n'écrit que les coefficients et les seconds membres ; chaque ligne du tableau est une équation.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right)$$
- Si l'on obtient une ligne $0 = 0$, il y a (en général) une infinité de solutions ; une ligne $0 = d$ avec $d \neq 0$ signifie qu'il n'y a pas de solution.
- Mise en équation : choisir les inconnues (avec leurs unités), traduire chaque information par une équation, résoudre, puis vérifier et interpréter.

Exercices d'application**Exercice 1** — Systèmes 3×3

Résous par la méthode du pivot de Gauss, en utilisant la disposition en tableau :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Exercice 2 — Nombre de solutions

Résous les systèmes suivants et indique le nombre de solutions :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Exercice 3 — Système à quatre inconnues

$$\text{Résous : } \begin{cases} x + y + z + t = 10 \\ x - y + z - t = -2 \\ x + 2y - z + t = 6 \\ 2x + y + z - t = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 — Recherche d'une fonction polynôme

Détermine la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par les points $A(1; 2)$, $B(-1; 6)$ et $C(2; 3)$.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Système avec paramètre

$$\text{Soit le système } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + mz = 3 \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est un réel.}$$

- 1) Applique la méthode du pivot de Gauss et montre que le système équivaut à un système triangulaire dont la dernière équation est $(m - 5)z = 0$.
- 2) Résous le système pour $m \neq 5$, puis pour $m = 5$.

Exercice 6 — Courbe passant par des points

Détermine les réels a, b, c, d tels que la courbe de $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par $O(0; 0)$ et $A(1; 2)$, et admette au point $B(2; 4)$ une tangente horizontale.

Situations complexes**Situation complexe 12.1** Mise en équation · pivot de Gauss**L'équation de la combustion du gaz butane****1 · Contexte**

Dans les familles de Bamako, on cuisine de plus en plus au gaz butane. En classe de chimie,

les élèves doivent équilibrer l'équation de combustion du butane.

2 · Support

Équation à équilibrer : $a \text{C}_4\text{H}_{10} + b \text{O}_2 \longrightarrow c \text{CO}_2 + d \text{H}_2\text{O}$. Chaque élément (carbone C, hydrogène H, oxygène O) doit avoir le même nombre d'atomes dans les deux membres. Les coefficients sont des entiers naturels les plus petits possibles.

3 · Fonction

Tu es le chef de groupe en TP de chimie. Tu dois équilibrer l'équation par une méthode mathématique.

4 · Consignes

- 1 Traduis la conservation de chaque élément par une équation ; tu obtiens un système de 3 équations à 4 inconnues.
- 2 Résous ce système par la méthode du pivot de Gauss en exprimant b , c , d en fonction de a .
- 3 Dédus-en les plus petits coefficients entiers et écris l'équation équilibrée.

Situation complexe 12.2 Mise en équation · tableau

Le mélange d'engrais du maraîcher

1 · Contexte

Un maraîcher de Baguinéda prépare la fumure de ses parcelles d'oignons. L'agent d'agriculture lui a prescrit une dose précise d'azote (N), de phosphore (P) et de potassium (K).

2 · Support

Trois engrais sont disponibles. Composition pour 100 kg d'engrais :

	Azote N	Phosphore P	Potassium K
Engrais A (complexe coton)	14 kg	23 kg	14 kg
Engrais B (urée)	46 kg	0	0
Engrais C (phosphate)	0	20 kg	10 kg

Besoin total : 74 kg d'azote, 66 kg de phosphore et 38 kg de potassium. Le sac de 50 kg coûte 15 000 F pour chaque engrais.

3 · Fonction

Tu es l'agent d'agriculture. Tu dois calculer les quantités d'engrais à acheter.

4 · Consignes

- 1 On note x , y , z les quantités (en centaines de kg) des engrais A, B et C. Traduis les besoins par un système de trois équations.
- 2 Résous ce système à l'aide d'un tableau et de la méthode du pivot de Gauss.
- 3 Calcule le nombre de sacs de 50 kg à acheter et le coût total.

Devoir de synthèse — Séquence 12

Systèmes d'équations linéaires

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (10 points) — Méthode du pivot de Gauss

Résous, à l'aide d'un tableau et de la méthode du pivot de Gauss :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

(a : 4 pt ; b : 3 pt)

- 3) Détermine la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe passe par $A(0;3)$, $B(1;2)$ et $C(3;6)$.
(3 pt)

Exercice 2 (10 points) — Situation : la ration de la cantine

L'infirmière d'une cantine scolaire de Ségou compose un repas avec du riz, des haricots et du poisson. On note x , y , z les quantités (en centaines de grammes) de chaque aliment.

Pour 100 g	Riz	Haricots	Poisson
Protéines (g)	7	20	18
Énergie (kcal)	130	120	100
Prix (F)	50	60	150

Le repas doit apporter 77 g de protéines et 710 kcal, et coûter 510 F.

- Traduis la situation par un système de trois équations. (3 pt)
- Résous le système par la méthode du pivot de Gauss. (5 pt)
- Donne la composition du repas en grammes et vérifie les trois conditions. (2 pt)

Séquence 13

Dénombrement

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide du langage mathématique. Nombre d'applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini ; arrangements, permutations et combinaisons dans un ensemble fini ; choix du modèle (avec ou sans ordre, avec ou sans répétition).

L'essentiel à retenir

- Principe multiplicatif : un choix en k étapes offrant $n_1, n_2, \dots, n_k$ possibilités donne $n_1 n_2 \cdots n_k$ choix. Principe additif : on additionne les cas disjoints.
- Nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments : n^p (p -listes, tirages successifs **avec remise**).
- **Arrangements** ($p \leq n$) : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ = nombre d'applications injectives (tirages successifs **sans remise**, l'ordre compte).
- **Permutations** : $n!$ = nombre de bijections d'un ensemble à n éléments sur lui-même ; $0! = 1$.
- **Combinaisons** : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ = nombre de parties à p éléments (tirages **simultanés**). $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.
- « Au moins un » : on dénombre le complémentaire (« aucun ») et on le retranche du total.

Exercices d'application**Exercice 1** — Calculs

Calcule $7!$, A_9^3 , C_9^3 , C_{15}^{13} et $\frac{12!}{10!2!}$. Résous dans $\mathbb{N}$: $A_n^2 = 56$; $C_n^2 = 36$.

Exercice 2 — Le code génétique

L'ADN est écrit avec 4 bases azotées : A, T, G, C. Un codon est une suite ordonnée de 3 bases (répétitions permises).

- 1) Combien de codons différents existe-t-il ? Interprète ce nombre comme un nombre d'applications.
- 2) Combien de codons ont leurs trois bases différentes ? Combien commencent par A ?
- 3) Sachant qu'il existe 20 acides aminés, explique pourquoi des codons de 2 bases ne suffiraient pas.

Exercice 3 — Tirages

Une urne contient 6 boules rouges, 4 vertes et 2 jaunes. On tire 3 boules. Pour chacun des trois modes de tirage (simultané ; successif sans remise ; successif avec remise), calcule le nombre de tirages possibles et le nombre de tirages unicolores.

Exercice 4 — Comités et anagrammes

- 1) Un laboratoire compte 10 chercheurs dont 4 femmes. Combien d'équipes de 3 chercheurs peut-on former ? avec exactement une femme ? avec au moins une femme ?
- 2) Combien d'anagrammes du mot SIKASSO peut-on former ?

Exercices d'approfondissement**Exercice 5** — Chemins dans un quadrillage

Un moustique se déplace sur un quadrillage du point $O(0;0)$ au point $A(5;3)$ en faisant uniquement des pas d'une unité vers la droite ou vers le haut.

- 1) Combien de pas fait-il ? Montre que le nombre de chemins est C_8^3 et calcule-le.
- 2) Combien de chemins passent par le point $B(2;1)$?

Exercice 6 — Le triangle de Pascal

Construis les sept premières lignes du triangle de Pascal ; vérifie que $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$ pour $n \leq 6$ et interprète en termes de parties d'un ensemble.

Situations complexes**Situation complexe 13.1** Arrangements · combinaisons · complémentaire**La campagne de vaccination****1 · Contexte**

Le district sanitaire de Ségou organise une campagne de vaccination contre la méningite. Il doit constituer des équipes mobiles.

2 · Support

Le district dispose de 12 agents : 5 infirmiers et 7 agents de santé communautaire (ASC). Une équipe compte 4 agents, dont un chef d'équipe. La campagne dure 10 jours.

3 · Fonction

Tu es l'adjoint du médecin-chef. Tu dois expliquer le nombre de possibilités d'organisation.

4 · Consignes

- 1) Calcule le nombre d'équipes de 4 agents sans chef désigné, puis avec un chef désigné.
- 2) Calcule le nombre d'équipes comprenant exactement 2 infirmiers, puis au moins un infirmier.
- 3) Le chef doit être un infirmier et l'équipe doit compter au moins 2 ASC. Calcule le nombre d'équipes possibles.

Situation complexe 13.2 *p-listes · arrangements · comparaison***Les codes des cadenas de la coopérative****1 · Contexte**

Une coopérative de producteurs de semences de Koutiala range ses semences certifiées dans un magasin fermé par un cadenas à code.

2 · Support

Cadenas actuel : 3 molettes de 10 chiffres. Nouveau cadenas proposé : 4 molettes de 10 chiffres. Un voleur peut tester un code toutes les 3 secondes.

3 · Fonction

Tu es le magasinier de la coopérative. Tu dois justifier l'achat du nouveau cadenas.

4 · Consignes

- ❶ Calcule le nombre de codes possibles pour chaque cadenas.
- ❷ Calcule le temps maximal nécessaire à un voleur pour tester tous les codes de chaque cadenas.
- ❸ Le magasinier choisit un code à 4 chiffres tous différents. Calcule le nombre de tels codes et dis si ce choix affaiblit la sécurité.

Devoir de synthèse — Séquence 13

Dénombrement

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Codes et mots

- 1) Combien de codes de 4 chiffres peut-on former ? Combien ont leurs 4 chiffres différents ? (2 pt)
- 2) Combien d'anagrammes du mot KOUTIALA peut-on former ? (2 pt)
- 3) Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on former avec les lettres du mot GAO complétées par B et D ? (2 pt)

Exercice 2 (6 points) — Comités

Une classe compte 15 garçons et 10 filles. On choisit 4 délégués.

- 1) Combien de choix sont possibles ? (1,5 pt)
- 2) Combien de choix comportent autant de filles que de garçons ? (2 pt)
- 3) Combien de choix comportent au moins une fille ? (2,5 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : le jeu de la loterie de la kermesse

À la kermesse d'un lycée de Kayes, chaque joueur coche 5 numéros sur une grille de 30 numéros. On tire ensuite au hasard 5 numéros gagnants.

- 1) Calcule le nombre de tirages possibles. (2 pt)
- 2) Combien de tirages contiennent exactement 3 des numéros cochés par un joueur ? (2 pt)
- 3) Calcule la probabilité qu'un joueur ait exactement 3 bons numéros, puis les 5 bons numéros. (2,5 pt)
- 4) Calcule la probabilité qu'il n'ait aucun bon numéro (à 10^{-3} près). (1,5 pt)

Séquence 14

Statistique à deux caractères

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; communiquer à l'aide de tableaux et de graphiques. Séries statistiques à deux caractères ; nuage de points (cas des points pondérés) ; point moyen ; ajustement linéaire par la méthode des deux points (Mayer) et par la méthode des moindres carrés ; corrélation linéaire.

L'essentiel à retenir

- Nuage de points $M_i(x_i; y_i)$; point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$. Pour des points pondérés, on utilise les moyennes pondérées.
- **Méthode des deux points (Mayer)** : on partage le nuage (rangé par x croissants) en deux groupes de même effectif (à une unité près), on calcule leurs points moyens G_1 et G_2 ; la droite d'ajustement est la droite (G_1G_2) ; elle passe par G .
- $V(x) = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$; $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$.
- **Moindres carrés** : droite de y en x : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.
Droite de x en y : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(y)}$.
- **Coefficient de corrélation** : $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$, $-1 \leq r \leq 1$; si $|r| \geq 0,87$ environ, l'ajustement linéaire est justifié.
- Un changement de variable (par exemple $z = \ln y$) permet parfois de se ramener à un ajustement linéaire.

Exercices d'application**Exercice 1** — Les deux méthodes d'ajustement

On a mesuré l'allongement y (en mm) d'un ressort en fonction de la masse suspendue x (en g).

x (g)	50	100	150	200	250	300
y (mm)	12	22	33	42	53	62

- 1) Représente le nuage de points et calcule les coordonnées du point moyen G .
- 2) Détermine la droite de Mayer en formant deux groupes de trois points.
- 3) Détermine la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés et compare.
- 4) Calcule le coefficient de corrélation linéaire et estime l'allongement pour 400 g.

Exercice 2 — Points pondérés

On a relevé l'âge x (en années) et le nombre y de dents définitives de 40 enfants d'une école de Kati.

$x \setminus y$	4	8	12
6	8	4	0
7	3	9	2
8	0	4	10

- 1) Donne les séries marginales et calcule $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
- 2) Représente le nuage de points pondérés et place le point moyen.

Exercice 3 — Calculs à partir de sommes

Pour une série de 8 couples, $\sum x_i = 40$, $\sum y_i = 96$, $\sum x_i^2 = 240$, $\sum y_i^2 = 1\,240$, $\sum x_i y_i = 530$. Calcule $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$, $\text{cov}(x, y)$, les deux droites de régression et r .

Exercices d'approfondissement**Exercice 4** — Changement de variable

Une culture de levures (fabrication du pain) a donné les résultats suivants (t en heures, N en millions de cellules) :

t	0	1	2	3	4
N	2,0	3,0	4,4	6,7	10,0

- 1) On pose $z = \ln N$. Calcule les valeurs de z à 10^{-2} près et la droite de régression de z en t .
- 2) Déduis-en une expression de la forme $N = k e^{at}$ et estime N au bout de 6 heures.

Situations complexes**Situation complexe 14.1** Moindres carrés · méthode de Mayer · prévision**Le poids des bœufs au ruban****1 · Contexte**

Au marché à bétail de Kati-Dral, les éleveurs n'ont pas de bascule. Un vétérinaire veut leur fournir une règle pour estimer le poids d'un bœuf à partir de son tour de poitrine mesuré au ruban.

2 · Support

Mesures sur six bœufs pesés à l'abattoir de Bamako :

Tour de poitrine x (cm)	140	150	160	170	180	190
Poids y (kg)	230	270	310	355	400	445

Le kilogramme de bœuf vif se négocie environ 1 500 F.

3 · Fonction

Tu es l'assistant du vétérinaire. Tu dois établir et justifier la règle d'estimation.

4 · Consignes

- 1 Représente le nuage de points et calcule le coefficient de corrélation linéaire. Un ajustement linéaire est-il justifié ?
- 2 Détermine la droite de Mayer, puis la droite des moindres carrés (coefficients à 10^{-2} près), et compare-les.
- 3 Estime, avec la droite des moindres carrés, le poids et la valeur d'un bœuf de 175 cm de tour de poitrine.

Situation complexe 14.2 Corrélation · ajustement · décision**La pluie et le rendement du mil****1 · Contexte**

La direction régionale de l'agriculture de Ségou veut prévoir la production de mil en fonction de la pluviométrie annoncée.

2 · Support

Relevés de cinq années :

Pluviométrie x (mm)	400	500	600	700	800
Rendement y (q/ha)	6	8	9	11	12

Le seuil de sécurité alimentaire de la zone est un rendement de 8,5 q/ha.

3 · Fonction

Tu es l'ingénieur agronome. Tu dois donner une règle de prévision et un seuil d'alerte.

4 · Consignes

- 1 Calcule $V(x)$, $V(y)$, $\text{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire.
- 2 Détermine la droite de régression de y en x et estime le rendement pour une pluviométrie de 650 mm.
- 3 Détermine la pluviométrie minimale qui permet d'atteindre le seuil de sécurité alimentaire.

Exemple résolu : nuage de points et droites d'ajustement**Exemple résolu — le poids des bœufs au ruban**

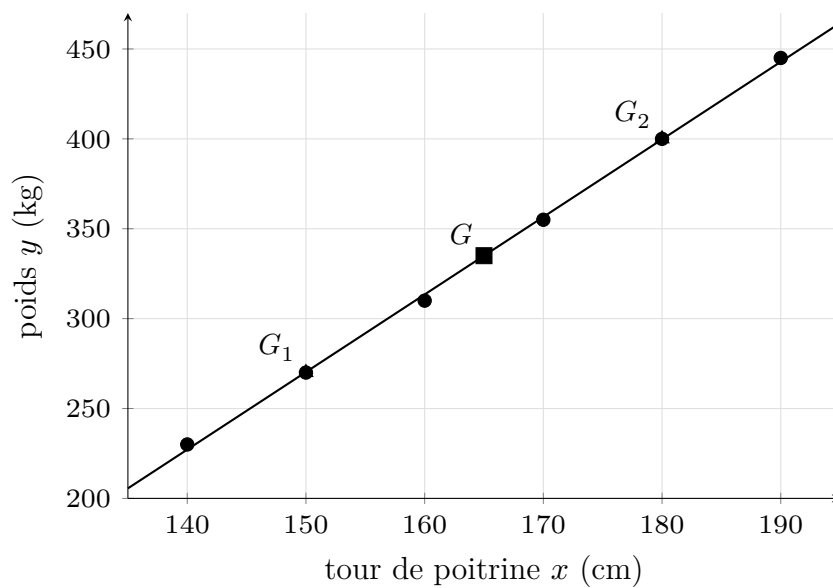
Données. Tour de poitrine x (cm) : 140 ; 150 ; 160 ; 170 ; 180 ; 190 — poids y (kg) : 230 ; 270 ; 310 ; 355 ; 400 ; 445.

1. Point moyen et droite de Mayer

$G(165 ; 335)$. Groupe 1 : $G_1(150 ; 270)$; groupe 2 : $G_2(180 ; 400)$. Pente $\frac{400-270}{30} \approx 4,33$: droite de Mayer $y \approx 4,33x - 380$.

2. Moindres carrés

$V(x) \approx 291,67$; $\text{cov}(x, y) \approx 1\,258,33$; $a \approx 4,31$; $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx -376,86$: $y \approx 4,31x - 376,86$.
 $V(y) \approx 5\,433,33$ et $r \approx 0,9996$: la corrélation est excellente.

**3. Prévision**

Pour $x = 175$: $y \approx 4,31 \times 175 - 376,86 \approx 378$ kg.

Devoir de synthèse — Séquence 14

Statistique à deux caractères

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (14 points) — Situation : la chaleur et la consommation d'eau

Une ONG de Gao étudie la consommation d'eau de boisson y (en litres par personne et par jour) en fonction de la température maximale x (en °C).

x (°C)	25	28	31	34	37	40
y (L)	3,0	3,4	3,9	4,3	4,8	5,2

- 1) Représente le nuage de points et calcule les coordonnées du point moyen G . (2,5 pt)
- 2) Détermine une équation de la droite de Mayer (deux groupes de trois points). (3 pt)
- 3) Calcule $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x, y)$, puis le coefficient de corrélation linéaire. Conclus. (3,5 pt)
- 4) Détermine la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients à 10^{-3} près). (2,5 pt)
- 5) Estime la consommation pour une température de 43 °C et le volume d'eau nécessaire par jour pour un camp de 2 000 personnes. (2,5 pt)

Exercice 2 (6 points) — Calculs à partir de sommes

Pour 10 couples : $\sum x_i = 60$, $\sum y_i = 150$, $\sum x_i^2 = 400$, $\sum y_i^2 = 2\,350$, $\sum x_i y_i = 950$. Calcule $\bar{x}$, $\bar{y}$, $V(x)$, $V(y)$, $\text{cov}(x, y)$, la droite de régression de y en x et le coefficient r . (6 pt)

Séquence 15

Probabilités

Compétences et contenus visés. Résoudre une situation-problème ; faire ressortir le lien entre statistique et probabilités. Rappels sur la probabilité élémentaire (11^e Sciences) ; espace probabilisé fini ; probabilité conditionnelle ; événements indépendants ; variable aléatoire, espérance, variance, écart type ; loi binomiale.

L'essentiel à retenir

- (Ω, P) espace probabilisé fini : $P(\Omega) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.
- Probabilité conditionnelle : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$. Probabilités totales : $P(A) = \sum P(B_i)P_{B_i}(A)$ si les B_i forment une partition. Formule de « retournement » : $P_A(B) = \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)}$.
- A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Variable aléatoire X de loi $(x_i ; p_i)$: $E(X) = \sum p_i x_i$; $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$.
- **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$: n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ; X = nombre de succès : $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$; $E(X) = np$; $V(X) = np(1 - p)$.

Exercices d'application

Exercice 1 — Tirage simultané et variable aléatoire

Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules blanches. On tire simultanément 3 boules ; X est le nombre de boules rouges obtenues.

- 1) Détermine la loi de probabilité de X .
- 2) Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Détermine la fonction de répartition de X .

Exercice 2 — Indépendance

On lance un dé équilibré. A : « le résultat est pair » ; B : « le résultat est un multiple de 3 » ; C : « le résultat est au moins 4 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

Exercice 3 — Arbre et probabilité conditionnelle

Dans une région, 30 % des enfants de moins de 5 ans fréquentent un centre de santé pour la consultation préventive. Parmi ceux-ci, 90 % sont vaccinés contre la rougeole ; parmi les autres, 50 % seulement sont vaccinés.

- 1) Construis l'arbre pondéré et calcule la probabilité qu'un enfant soit vacciné.
- 2) Un enfant est vacciné. Calcule la probabilité qu'il fréquente le centre de santé.

Exercice 4 — Loi binomiale

Un tireur atteint la cible avec la probabilité 0,7. Il tire 6 fois, de façon indépendante ; X est le nombre de tirs réussis. Calcule $P(X = 6)$, $P(X = 4)$, $P(X \geq 5)$, $P(X \geq 1)$, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercices d'approfondissement**Exercice 5 — La drépanocytose**

La drépanocytose est une maladie génétique. Chaque parent transmet au hasard à l'enfant l'un de ses deux gènes, A (normal) ou S, de façon indépendante. Un enfant SS est malade ; un enfant AS est porteur sain. Deux parents sont tous les deux porteurs sains (AS).

- 1) Construis un tableau de croisement et calcule les probabilités qu'un enfant soit SS, AS, AA.
- 2) Le couple a 4 enfants. Calcule la probabilité qu'aucun ne soit malade, puis qu'au moins un soit malade.
- 3) Un enfant du couple n'est pas malade. Calcule la probabilité qu'il soit porteur sain.

Exercice 6 — Nombre d'épreuves nécessaires

La probabilité qu'une graine de niébé germe est 0,85. Combien de graines faut-il semer au minimum pour que la probabilité qu'au moins une graine germe dépasse 0,9999 ?

Situations complexes**Situation complexe 15.1** Probabilités totales · formule de retournement**Le test de diagnostic rapide du paludisme****1 · Contexte**

Pendant l'hivernage, le CSCOM de Niono utilise des tests de diagnostic rapide (TDR) du paludisme. Le médecin veut connaître la fiabilité d'un résultat positif.

2 · Support

Dans la zone, en hivernage, 30 % des personnes qui consultent pour fièvre ont le paludisme. Le TDR est positif chez 95 % des malades et chez 10 % des personnes non atteintes. Le centre reçoit environ 200 consultations pour fièvre par semaine.

3 · Fonction

Tu es le technicien de laboratoire. Tu dois expliquer au comité de santé la fiabilité du test.

4 · Consignes

- 1 Construis un arbre pondéré et calcule la probabilité qu'un test soit positif.
- 2 Calcule la probabilité qu'une personne dont le test est positif ait réellement le paludisme, puis qu'une personne dont le test est négatif soit malade.
- 3 Estime le nombre de tests positifs par semaine et, parmi eux, le nombre de « faux positifs ». Commente.

Situation complexe 15.2 Loi binomiale · espérance · décision**Les semences améliorées de maïs****1 · Contexte**

Une coopérative de Sikasso hésite entre deux variétés de semences de maïs. Elle veut choisir la plus rentable.

2 · Support

Variété locale : taux de germination 0,8 ; sachet de 20 graines à 500 F. Variété améliorée : taux de germination 0,95 ; sachet de 20 graines à 900 F. Chaque plant levé rapporte en moyenne 60 F de récolte. On admet que les germinations sont indépendantes.

3 · Fonction

Tu es le conseiller agricole de la coopérative. Tu dois recommander une variété.

4 · Consignes

- ❶ Pour chaque variété, justifie que le nombre X de graines levées dans un sachet suit une loi binomiale, et calcule $E(X)$.
- ❷ Calcule, pour chaque variété, la probabilité qu'au moins 18 graines lèvent (à 10^{-3} près).
- ❸ Calcule le gain moyen (recette moyenne moins prix du sachet) par sachet pour chaque variété et donne ta recommandation.

Devoir de synthèse — Séquence 15

Probabilités

Durée : 2 heures · Barème : 20 points · Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (6 points) — Variable aléatoire

Une urne contient 2 boules rouges et 4 boules noires. On tire simultanément 2 boules; X est le nombre de boules rouges.

- 1) Détermine la loi de X . (2,5 pt)
- 2) Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. (3,5 pt)

Exercice 2 (6 points) — Probabilités conditionnelles

Une usine de jus utilise deux machines : M_1 produit 60 % des bouteilles et M_2 40 %. 2 % des bouteilles de M_1 et 5 % de celles de M_2 sont défectueuses.

- 1) Construis un arbre pondéré et calcule la probabilité qu'une bouteille soit défectueuse. (3 pt)
- 2) Une bouteille est défectueuse. Calcule la probabilité qu'elle vienne de M_2 . (3 pt)

Exercice 3 (8 points) — Situation : l'efficacité du vaccin

Un vaccin contre la méningite protège 90 % des personnes vaccinées. Dans une famille de Mopti, 10 personnes vaccinées sont exposées à la maladie; on admet l'indépendance. X est le nombre de personnes protégées.

- 1) Justifie que X suit une loi binomiale; précise ses paramètres. (2 pt)
- 2) Calcule $P(X = 10)$ et $P(X \geq 9)$ (à 10^{-3} près). (3 pt)
- 3) Calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$, et interprète $E(X)$. (3 pt)

Sujets type BAC

Terminale Sciences Expérimentales

Trois sujets de 3 heures sur 20 points couvrant l'ensemble du programme (UA1, UA2, UA3)

Sujet type BAC n° 1

Terminale Sciences Expérimentales — Nombres complexes · Probabilités · Logarithme et intégrale

Durée : 3 heures · Coefficient 3 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Nombres complexes

- 1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On note z_1 la solution de partie imaginaire positive et z_2 l'autre. (1,5 pt)
- 2) Écris z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, puis calcule z_1^6 . (1,5 pt)
- 3) Dans le plan complexe, A et B ont pour affixes z_1 et z_2 . Montre que le triangle OAB est équilatéral. (1 pt)
- 4) Montre que la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme B en A . (1 pt)

Exercice 2 (5 points) — Probabilités

Une ONG distribue des moustiquaires imprégnées dans les villages du cercle de Bla. 4 % des moustiquaires d'un stock sont défectueuses. Un agent prélève au hasard 10 moustiquaires ; on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. X est le nombre de moustiquaires défectueuses.

- 1) Justifie que X suit une loi binomiale ; précise ses paramètres. (1 pt)
- 2) Calcule $P(X = 0)$ et $P(X \leq 1)$ (à 10^{-3} près). (2 pt)
- 3) Calcule $E(X)$ et $V(X)$. (1 pt)
- 4) Le stock est refusé si l'on trouve au moins 2 moustiquaires défectueuses. Calcule la probabilité de refuser le stock. (1 pt)

Problème (10 points) — Logarithme, asymptote et intégrale

Partie A — Fonction auxiliaire. Soit $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

- 1) Étudie le sens de variation de g et calcule $g(1)$. (1,5 pt)
- 2) Dédus-en le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$. (1 pt)

Partie B — Étude de f . Soit $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

- 3) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. (1,5 pt)
- 4) Montre que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et dresse le tableau de variations de f . (2 pt)
- 5) Montre que la droite $(D) : y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ et étudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) . (1,5 pt)
- 6) Trace (D) et $(\mathcal{C})$. (1 pt)

Partie C — Calcul d'aire.

- 7) Calcule, en cm^2 , l'aire du domaine compris entre $(\mathcal{C})$, (D) et les droites $x = 1$ et $x = e$. (1,5 pt)

Sujet type BAC n° 2

Terminale Sciences Expérimentales — Suites numériques · Statis-
tique à deux caractères · Exponentielle et équation différentielle

Durée : 3 heures · Coefficient 3 · Barème : 20 points
Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Suite récurrente

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

- 1) Montre par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n < 3$. (1 pt)
- 2) Montre que (u_n) est croissante ; déduis-en qu'elle converge. (1,5 pt)
- 3) Montre que pour tout n , $3 - u_{n+1} = \frac{3 - u_n}{3 + \sqrt{6 + u_n}}$, puis que $3 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - u_n)$. (1,5 pt)
- 4) Déduis-en que $0 < 3 - u_n \leq 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et la limite de (u_n) . (1 pt)

Exercice 2 (5 points) — Statistique à deux caractères

On a mesuré la hauteur y (en cm) de plants de mil en fonction du nombre x de jours après la levée, dans une station de recherche de Cinzana.

x (jours)	10	20	30	40	50	60
y (cm)	8	15	24	31	39	46

- 1) Représente le nuage de points et le point moyen G . (1 pt)
- 2) Détermine la droite de Mayer (deux groupes de trois points). (1,5 pt)
- 3) Détermine la droite des moindres carrés de y en x et le coefficient de corrélation linéaire (on donne $V(y) \approx 172,47$). (1,5 pt)
- 4) Estime la hauteur des plants au 75^e jour. (1 pt)

Problème (10 points) — Exponentielle et équation différentielle

Partie A. Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = 0$.

- 1) Résous (E) et détermine la solution h telle que $h(1) = 1$. (1,5 pt)

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{1-x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe.

- 2) Vérifie que $f(x) = x h(x)$. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (1,5 pt)
- 3) Montre que $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}$ et dresse le tableau de variations de f . (2 pt)
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. (1 pt)
- 5) Trace (T) et $(\mathcal{C})$. (1,5 pt)

Partie C.

- 6) Vérifie que $F(x) = -(x + 1)e^{1-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
- 7) Calcule l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$ (valeur exacte et valeur approchée à 10^{-2}). (1,5 pt)

Sujet type BAC n° 3

Terminale Sciences Expérimentales — Similitudes · Dénombrement et variable aléatoire · Équation différentielle et fonction trigonométrique

Durée : 3 heures · Coefficient 3 · Barème : 20 points

Calculatrice scientifique autorisée

Nom et prénom : Classe : Note : /20

Exercice 1 (5 points) — Similitude directe

Soit S la transformation du plan d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - i$.

- 1) Montre que S est une similitude directe; détermine son centre Ω , son rapport et son angle. (2 pt)
- 2) Détermine les images par S des points $A(2)$ et $B(2i)$. (1,5 pt)
- 3) Montre que le triangle $\Omega AA'$ est rectangle isocèle ($A' = S(A)$). (1,5 pt)

Exercice 2 (5 points) — Dénombrement et variable aléatoire

Un sac contient 6 jetons : 3 rouges marqués 1, 2 verts marqués 2 et 1 noir marqué 5. On tire simultanément 2 jetons et on note X la somme des nombres obtenus.

- 1) Calcule le nombre de tirages possibles. (0,5 pt)
- 2) Détermine la loi de probabilité de X . (2 pt)
- 3) Calcule $E(X)$ et $V(X)$. (1,5 pt)
- 4) Un joueur mise 500 F et reçoit $100X$ francs. Le jeu est-il équitable? (1 pt)

Problème (10 points) — Équation différentielle et fonction trigonométrique

Partie A. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.

- 1) Résous (E) . (1 pt)
- 2) Détermine la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2\sqrt{3}$. (1,5 pt)
- 3) Montre que $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. (1,5 pt)

Partie B. On étudie $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- 4) Montre que f est périodique de période π . (0,5 pt)
- 5) Étudie les variations de f sur $[0; \pi]$; précise le maximum, le minimum et les valeurs de x où f s'annule. (2,5 pt)
- 6) Trace la courbe de f sur $[-\pi; \pi]$. (1 pt)

Partie C.

- 7) Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$ et la valeur moyenne de f sur une période. (2 pt)