

Exercice 1 :

On considère la suite de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n d'affixe z_n .

On considère le point A d'affixe $z_A = 4 + 2i$.

1°) Soit U_n la suite définie pour tout entier naturel n par: $U_n = z_n - z_A$.

- a) Pour tout entier naturel n , exprimer U_{n+1} en fonction de U_n puis en déduire la nature de la suite U_n .
- b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n .
- c) A l'aide d'une démonstration par récurrence confirmer la question b).

2°) Montrer que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

3°) Dans l'ensemble des nombres complexes on pose : $z' = U_{n+1}$ et $z = U_n$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

Exercice 2 :

I-) Calculer chacune des intégrales suivantes :

1°) $I = \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$; 2°) $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos^2 x} dx$; 3°) $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$

II-) Soit $(I_n), n \in \mathbb{N}$, la suite définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$

1°) Calculer : I_1 et $I_1 + I_0$ puis en déduire la valeur de I_0 .

2°) Pour tout $n \geq 0$, calculer: $I_n + I_{n+1}$ puis en déduire la monotonie de la suite I_n .

3°) Pour tout $x \in [0; 1]$ et $n \geq 0$, montrer que: $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$

En déduire un encadrement de I_n .

4°) La suite I_n est-elle convergente ?

Problème :

Partie A :

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} x + 2 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, & \text{si } x < 0 \\ (2+x)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe.

1°) Démontrer que $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

2°) Calculer les limites aux bornes de D_f .

3°) Montrer que la courbe (C) de f admet une droite (D) comme asymptote oblique en $-\infty$ dont on précisera l'équation.

4°) Etudier la continuité de f en 0.

5°) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats.

6°) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ puis dresser le tableau de variation de f .

7°) Tracer (C) , ses asymptotes et demi tangentes dans le même plan orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. (On remarquera que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ dont on donnera un encadrement d'ordre 0).

Partie B :

Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; -1[$

1°) Montrer que g définit une bijection de I vers un intervalle K à préciser.

2°) On note g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Calculer $g(-2)$ puis en déduire que g^{-1} est dérivable en -2 .

b) Calculer $(g^{-1})(\ln 3)$ puis construire la courbe (C_g) de g^{-1} dans le repère précédent.

« La mathématique est la mère des sciences »