

Exercice 1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on donne les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 2 + 2i$ et $Z_B = (1 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})$.

1°) Ecrire le nombre complexe $Z = \frac{Z_A}{Z_B}$ sous forme algébrique.

2°) a) Déterminer OA et AB puis vérifier que $OB = 2(1 + \sqrt{3})$.

b) Déterminer en radian la mesure principale de $(\vec{u}; \overrightarrow{OA})$ et de $(\vec{u}; \overrightarrow{OB})$. En déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

3°) En utilisant les questions précédentes, donner les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$;

4°) a) Déterminer l'axe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 2(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère OABD ? justification à l'appui.

Exercice 2 :

Soient les suites a_n et $b_n, n \geq 0$ définies par: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} ; \begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$

1°) Calculer a_1 et b_1 .

2°) Soit la suite $d_n, n \in \mathbb{N}$ définie par: $d_n = b_n - a_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (d_n) puis en déduire son expression en fonction de n .

b) En déduire que $\forall n \geq 0, d_n > 0$.

c) Calculer la limite de la suite d_n .

3°) a) Démontrer que $\forall n \geq 0, a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$. En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n) .

b) Démontrer que $\forall n \geq 1, a_0 < a_n < b_n < b_0$.

c) Des questions 3) -a) et 3) -b) déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4°) a) Déduire de la question 3) -a) que $\forall n \geq 1, a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1})$.

b) Déduire la limite de la suite a_n puis celle de b_n .

Problème :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} f(x) = (1-x)e^x, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité 2cm.

Partie A :

1°) a) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

b) f est-elle dérivable en $x_0 = 1$? Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.

c) En déduire le tableau de variation de f .

3) Déterminer l'équation de la droite (D) asymptote oblique pour la courbe (C) de f en $+\infty$

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point $x_0 = -1$.

5°) Tracer (D) , (T) et (C) .

6°) a) Montrer que la restriction h de f sur $I =]1; +\infty[$ décrit une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

b) On note (C') la courbe représentative de cette bijection réciproque. Construire (C') .

Partie B :

1°) Soit α un réel strictement négatif.

a) Calculer : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 x e^x dx$

b) En déduire la valeur de l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$.

2°) Calculer, en cm^2 le volume $V(\alpha)$ du solide engendré par la rotation complète autour de l'axe (Ox) des abscisses.

Partie C :

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos(t)} - 1, & t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\ y(t) = 2 \tan(t) \end{cases}$$

1°) Donner une équation cartésienne de (Γ) .

2°) En déduire que (Γ) est une partie de (C) que l'on précisera.

« La mathématique est la mère des sciences »