

Exercice 23

Soient f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Partie 1

a) Calcul de $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

On pose $u = 1 + x^2$, donc $du = 2x dx$, soit $x dx = \frac{du}{2}$.
Quand $x = 0$, $u = 1$; quand $x = 1$, $u = 2$. Ainsi :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} [\ln |u|]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

b) Calcul de $I_1 + I_2$ et déduction de I_2

On a :

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 [f(x) + g(x)] dx.$$

Or :

$$f(x) + g(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x+x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} = x.$$

Donc :

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On en déduit :

$$I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

Partie 2

a) Décomposition de $\frac{x^2 - 1}{2x - 1}$

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$:

$$\frac{x^2 - 1}{2x - 1} = ax + b + \frac{c}{2x - 1}.$$

En multipliant les deux membres par $(2x - 1)$:

$$x^2 - 1 = (ax + b)(2x - 1) + c = 2ax^2 + (-a + 2b)x + (-b + c).$$

On identifie les coefficients de chaque puissance de x :

$$x^2 : \quad 1 = 2a \implies a = \frac{1}{2},$$

$$x^1 : \quad 0 = -a + 2b \implies 2b = a = \frac{1}{2} \implies b = \frac{1}{4},$$

$$x^0 : \quad -1 = -b + c \implies c = -1 + b = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{3}{4}.}$$

La décomposition est donc :

$$\frac{x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x - 1}.$$

b) Calcul de $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx$

En utilisant la décomposition précédente :

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x - 1)} \right) dx.$$

On intègre terme à terme. Pour le dernier terme, on utilise :

$$\int \frac{1}{2x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 1| + \text{cte.}$$

Donc :

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{3}{8} \ln |2x - 1| \right]_{-1}^0.$$

En $x = 0$:

$$\frac{0}{4} + \frac{0}{4} - \frac{3}{8} \ln |-1| = 0 - \frac{3}{8} \ln 1 = 0.$$

En $x = -1$:

$$\frac{1}{4} + \frac{-1}{4} - \frac{3}{8} \ln |-3| = 0 - \frac{3}{8} \ln 3 = -\frac{3 \ln 3}{8}.$$

On conclut :

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx = 0 - \left(-\frac{3 \ln 3}{8} \right) = \frac{3 \ln 3}{8}.$$

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx = \frac{3 \ln 3}{8}.$$