

Primitives - Intégrales Série N° 2

Exercice : 1

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^1 \frac{3}{(3+2t)^4} dt$$

$$B = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 2t + 1}$$

$$C = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2 - 4x)^2} dx$$

$$D = \int_2^3 \frac{\ln x^2}{x} dx$$

$$E = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$F = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(1 - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) dx$$

$$G = \int_0^1 \left(\sqrt{2t+1} + \frac{1}{\sqrt{t+5}} \right) dt$$

$$H = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin 2x dx$$

$$K = \int_1^x \frac{1}{t^4} e^{t^3} dt$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 x - 3 \cos x \sin x) dx$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x) dx$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos 2x} e^{\tan x} dx$$

$$O = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} \ln(1 + \cos x) dx$$

Exercice : 2

Soient $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x}{(2x+1)^2(1-4x)} dx$ et

$$J = \int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{(2x+1)^2(1-4x)} dx$$

On pose $K = 2I + J$ et $L = 2I - J$ calculer K et L .

Exercice : 3

L'objectif de cet exercice est les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

1- Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$$

a- Calculer la dérivée de la fonction

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2}.$$

b- En déduire la dérivée f' de f .

c- Calculer la valeur de I .

2- Calcul de J et de K.

a- Sans calculer explicitement J et K vérifier que

$$J + 2I = K.$$

b- A l'aide d'une intégration par parties sur

l'intégrale K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

c- En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice : 4

On donne les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx \quad \text{Et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx$$

1- Calculer $I + J$ et $I - J$

2- En déduire les valeurs de I et J .

Exercice : 5

$$\text{On pose } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx$$

1- Calculer $K = I + J$.

2- Calculer I , puis en déduire la valeur de J .

Exercice : 6

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$

- 1- Calculer $I + J$ et $I - J$ en effectuant une intégration par parties.
- 2- En déduire I et J

Exercice : 7

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$.

- 1- Calculer $I + J$.
- 2- En utilisant une intégration par parties, calculer $I - J$.
- 3- En déduire les valeurs de I et J .

Exercice : 8

On considère les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \quad \text{Et} \quad B = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx.$$

- 1- Utiliser les propriétés de la linéarité pour calculer $A + B$ et $A - B$.
- 2- En déduire les valeurs de A et B .

Exercice : 9

On considère les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx \quad \text{Et} \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx.$$

- 1- Calculer $A + B$ et $A - B$.
- 2- En déduire les valeurs de A et B .

Exercice : 10

On considère $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

- 1- Montrer que l'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx.$$

- 2- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J.$$

- 3- Montrer de même que : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$

- 4- Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

- 5- Montrer que $I - J = 0$

- 6- En déduire les valeurs de I et J .

Exercice : 11

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx ;$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$$

- 1- Calculer $I + J + K$ et $I - J$.
- 2- Exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
- 3- Déduire des questions précédentes la valeur de $I + J - 3K$ et I, J et K .

Exercice : 12

On considère la fonction f définie de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ vers $\mathbb{R}$

$$\text{par : } f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

- 1- Démontrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \quad f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}.$$

- 2- Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ en déduire une

relation entre les intégrales I et J avec

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx ; \quad \text{calculer } J.$$

Exercice : 13

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

par : $f(x) = \tan^2 x - \sin^2 x$

1- Démontrer que $\forall x \in I, f(x) = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

2- F est la fonction définie sur I par :

$$F(x) = \frac{1}{4}(4\tan x + \sin 2x - 6x) \quad \text{démontrer}$$

que F est une primitive de f sur I .

3- Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$.

Exercice : 14

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, dt \right) dx$

1- Linéariser $\sin^6 x$

2- Démontrer que $I = \frac{15\pi - 44}{1152}$

Exercice : 15

On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \, dx$ et

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \ln(1 + \cos x) \, dx$$

1- Calculer J .

2- A l'aide d'une intégration par parties, exprimer K en fonction de J , et déduire la valeur de K .

Exercice : 16

Soit l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

1- On pose $t = \sin x$ montrer que $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2-t^2} \, dt$.

2- Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{2-t^2} = \frac{a}{\sqrt{2}-t} + \frac{b}{\sqrt{2}+t}$$

3- Déterminer alors I .

Exercice : 17

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

1- Montrer que f existe sur l'intervalle $[1; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$

2- Déduisez-en la valeur de $K = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx$.

Exercice : 18

On donne $K = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Soit l'intégrale $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$.

1- Démontrer que $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx - K$

2- Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice : 19

On considère l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1-x}{\sqrt{1+x}} \, dx$.

1- Calculer la dérivée des fonctions f et g définies sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}$;

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

2- Vérifier que : $J = 2 \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} - \int_1^2 \sqrt{1+x} \, dx$

3- Calculer J .

Exercice : 20

- 1- Déterminer deux constantes réelles A et B telles

$$\text{que : } \frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

- 2- En déduire la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt$$

- 3- Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$

Exercice : 21

- 1- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

- 2- Calculer l'intégrale $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t(1+t^2)} dt$

- 3- A l'aide de l'intégration par parties, calculer

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt.$$

Exercice : 22

- 1- Soit f la fonction numérique de variable réelle

$$\text{définie pour } t \neq 1 \text{ par : } f(t) = \frac{t^3 - 3t^2 + t}{1-t}$$

- a- Déterminer les réels a, b, c et d tels que :

$$f(t) = at^2 + bt + c + \frac{d}{1-t}.$$

- b- Calculer l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.

- 2- A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (3t^2 - 6t + 1) \ln(1-t) dt$$

Exercice : 23

$$\text{Soit l'intégrale } I = \int_{\ln 3}^{3 \ln 2} \frac{dx}{1+e^x}$$

- 1- On pose $t = \sqrt{1+e^x}$, montrer que $dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$

$$2- \text{ Montrer que } I = \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt.$$

- 3- Déterminer alors I.

Exercice : 24

- 1- Soit g la fonction définie sur l'intervalle

$$]1; +\infty[\text{ par : } g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

- a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait $\forall x > 1$

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

- b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$

- 2- Soit f la fonction définie par sur l'intervalle

$$]1; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

- a. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$

- b- En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer l'intégrale

$$I = \int_2^3 \frac{2x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$$

On donnera le résultat sous la forme

$p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice : 25

- 1- Démontrer que, pour tout entier naturel p et q on a :

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx$$

- 2- Calculer $\int_0^1 x^2 (1-x)^{15} dx$



BONNE CHANCE