

Primitives - Intégrales Série N° 3

Exercice : 1

- 1- Démontrer que : $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^4} \leq x^n$$

- 2- En déduire que :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

Exercice : 2

Soit f une fonction dérivable sur $[a;b]$ et sa dérivée f' est continue sur l'intervalle $[a;b]$

- 1- Montrer que :

$$\int_a^b x f'(x) dx + \int_a^b f(x) dx = b f(b) - a f(a)$$

- 2- Calculer $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ et en déduire

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

Exercice : 3

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$

- Calculer I_0
- A l'aide d'une intégration par parties calculer I_1 .
- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons la relation de récurrence $(3+2n)I_n = 2n I_{n-1}$.

Exercice : 4

On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+2} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1- Calculer I_0 , en utilisant une I.P.P, calculer I_1 .

- 2- Démontrer que $\forall x \in [0;1]; \frac{\sqrt{2}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{3}}{n+1}$

- 3- En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

- 4- Comparer x^{n+1} et x^n pour $x \in [0;1]$. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .

Exercice : 5

On note $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ pour $n > 0$

- Calculer I_0
- En intégrant par parties ; montrer que $n \geq 1$
 $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2n I_{n-1}$
- En déduire la valeur de I_1, I_2 et I_3

Exercice : 6

On considère l'intégrale $I_n = \int_{-2}^2 (x^2 - 3)^n dx \quad n \in \mathbb{N}$.

- Calculer I_1 .
- Montrer que $I_{n+1} = \int_{-2}^2 x^2 (x^2 - 3)^n dx - 3I_n$
- Soit la fonction f_n définie sur l'intervalle $[-2;2]$
par : $f_n(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 - 3)^{n+1}}{n+1}$. calculer $f_n'(x)$.
- En faisant une intégration par parties, montrer que
 $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)I_{n+1} + 6(n+1)I_n = 4$.
En déduire I_2 et I_3 .

Exercice : 7

Soit la suite numérique (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

- 1- Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- 2- Montrer que : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice : 8

Le but de cet exercice est l'étude de la suite (U_n) définie par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \text{ et } \forall n \geq 1, U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

- 1- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
 - a- Calculer la dérivée f' de f , en déduire U_0
 - b- Calculer U_1
- 2- Prouver que la suite (U_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer U_n). En déduire que la suite (U_n) est convergente.
- 3- Montrer que $\forall x \in [0,1]$ on a :
 $1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$. En déduire que $\forall n \geq 1$ on a :
 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 Déterminer la limite de la suite (U_n) .
- 4- $\forall n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{x^2+1} dx$
 - a- Vérifier que $\forall n \geq 3$ on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.
 - b- Par I.P.P sur I_n , montrer que $\forall n \geq 3$ on a : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$
 - c- En déduire que $\forall n \geq 3$ on a :
 $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$
- 5- Déduire des questions précédentes 3) et 4. c) que la suite (nU_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice : 9

On pose pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$

- 1- Calculer I_1
- 2- Montrer que $\forall n \geq 3$;

$$I_n = \int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2+4} dx - 4I_{n-2}$$
- 3- A l'aide d'une I.P.P, en déduire que $\forall n \geq 3$
 $n.I_n = 2^n \sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$. En déduire les valeurs de I_3 et I_5

Exercice : 10

- 1- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout :
 $x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$
- 2- Soit $\alpha > 1$
 - a- Calculer $\int_1^\alpha \frac{1}{x(1+x)^2} dx$
 - b- Soit φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par
 $\varphi(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x(1+x)^2} dx$. En intégrant par parties, calculer $\varphi(\alpha)$ en fonction de α .
 - c- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} = 0$, en déduire

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

Pour $a > 0$, on pose $I(a) = \int_a^1 x(\ln x)^2 dx$.

- 1- Prouver que $I(a) = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx$
- 2- En effectuant une I.P.P prouver que :

$$I(a) = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$
- 3- Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$.

Exercice : 11

On pose $I_0 = \int_1^e x dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

- 1- Calculer I_0 et I_1 .
- 2- A l'aide d'une intégration par parties dans I_n , prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2I_n + nI_{n-1} = e^2$. en déduire le calcul de I_2 .
- 3- Montrer sans calcul que la suite (I_n) est décroissante. En déduire en utilisant la relation démontrée à la question 2, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$
- 4- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

Exercice : 12

On considère la suite intégrale (I_n) définie par

$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx \text{ et } \forall n \geq 1 \text{ par : } I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

- 1- Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .
- 2- En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1} \times e^2 + (n+1)I_n$
- 3- En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .

Exercice : 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on donne l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^x$

- 1- Calculer I_1
- 2- Démontrer que $\forall n > 0 \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
(on pourra utiliser une I.P.P)
- 3- En déduire les valeurs de I_2 et I_3
- 4- Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x) e^x dx$

Exercice : 14

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1- Montrer que $\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^x}{2}$
- 2- En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_n}{e^n} \right)$

Exercice : 15

Soit la suite numérique (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

- 3- Montrer que la suite (U_n) est croissante.
- 4- Montrer que : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice : 16

- 1- A l'aide d'une intégration par parties calculer : $I_n = \int_0^{2n} x e^{-x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $I_n = 1 - (2n+1)e^{-2n}$.
- 2- On pose $V_n = \frac{1}{2n+1} (1 - I_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont précisera le premier terme et la raison.
- 3- Etudier le sens de variation de la suite (V_n) . la suite (V_n) est-elle convergente ?
- 4- Quelle est la nature de suite (U_n) définie par : $U_n = \text{Log}(V_n)$

Exercice : 17

On pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1- Justifier l'existence de I_n
- 2- Démontrer que : $\forall n \geq 2, \quad I_n = e - nI_{n-1}$
- 3- On définit la suite (U_n) et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = (-1)^n (eU_n - n!)$

a- Exprimer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, U_{n+1} en fonction de n et U_n

b- En déduire que $U_n \in \mathbb{N}$

Exercice : 18

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$

- 1- Calculer $I_0 + I_1$ et I_1 . en déduire la valeur de I_0
- 2- Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n . En déduire les valeurs de I_2 et I_3
- 3- Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x \in [0; 1]$. en déduire, sans essayer de calculer I_n que la suite (I_n) est croissante.
- 4- Montrer que pour tout nombre $x \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$$
- 5- En déduire un encadrement de I_n à cet effet, on calculera $\int_0^1 e^{nx} dx$
- 6- Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice : 19

On pose pour tout entier naturel non nul

$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et $I_0 = \int_1^e x^2 dx$, Calculer I_0

- 1- En utilisant une I.P.P calculé I_1 .
- 2- En utilisant une I.P.P démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3 (1)$ En déduire I_2
- 3- Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n non nul, I_n est positive.
- 4- Déduire de l'égalité (1) que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$$
- 5- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice : 20

Pour tout $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$$

- 1- Calculer I_2
- 2- Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - (n-1)I_n$$
- 3- En déduire la valeur de I_3 .

Exercice : 21

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier

naturel n par : $U_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

On considère la fonction $F_n(x) = \frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

- 1- Montrer que : $F_n'(x) = (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x^2} - \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}$
- 2- En déduire que $U_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)U_n$

Exercice : 22

Soit l'intégrale $I_n = \int_1^{\lambda} (\ln x)^n dx$ $\lambda > 0$ $n \in \mathbb{N}$

- 1- Montrer à l'aide d'une I.P.P que l'on a :

$$I_n = \lambda (\ln x)^n - n I_{n-1}$$
- 2- Montrer alors que :

$$I_n = \lambda [(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + \dots + (-1)^n \times n!]$$

$$- (-1)^n \times n!$$
- 3- Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3

Exercice : 23

1- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

2- Soit la fonction f définie par, pour tout réel x , par :
 $f(x) = \ln(1+e^x)$

a- Calculer la dérivée f' de la fonction f

b- En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de $\int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$

Exercice : 24

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x} \text{ on se propose de trouver un encadrement}$$

de l'aire A de l'ensemble des points $M\left(\frac{x}{y}\right)$ tels que

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$

1- Etudier f et tracer (C_f) .

2- Montrer que pour tout

$$x \geq 1, \quad \frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

3- Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$

4- En déduire un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$
 puis un encadrement de A

Exercice : 25

Soit deux suites (I_n) et (J_n) définies par :

$$I_n = \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \text{ et } J_n = \frac{1}{e^{2n}} I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- Calculer $I_1, I_0 + I_1$ et I_0

2- Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3- Démontrer que : $\frac{e^{2n}-1}{n(e^2+1)} \leq I_n \leq \frac{e^{2n}-1}{2n}$

$\forall n \neq 0$ (on pourra prouver sous certaine condition $2 \leq 1+e^x \leq 1+e^2$).

4- En déduire les limites de I_n et J_n

5- Calculer en fonction de n la valeur de $I_n + I_{n+1}$. en déduire une méthode permettant le calcul explicite de I_n en fonction de n .

Exercice : 26

Pour tout naturel $n \geq 1$ on pose

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{\frac{t}{2}} dt$$

1- A l'aide d'une I.P.P calculer I_1 .

2- Démontrer que $\forall n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$

3- En déduire par récurrence que $\forall n \geq 1$ on a :

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n$$

4- Montrer qu'on peut trouver une constante A telle

que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$ (on pourra déterminer A

en majorant la fonction $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0; 1]$)

5- En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

Exercice : 27

Pour tout entier naturel non nul, on définit sur $[1; e]$, la

fonction f_n par : $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1- A l'aide d'une I.P.P. calculer I_1 .

2- Démontrer que $\forall n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

3- Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ (on rappelle que } 0! = 1)$$

4- Soit $n \geq 1$, en encadrant $(\ln x)^n$ sur $[1; e]$ montrer que $0 \leq I_n \leq 1$. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0.$$

Exercice : 28

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2 .

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

1- Calculer I_1 .

2- Etablir que $\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$

3- A l'aide d'une I.P.P., montrer que $\forall n \geq 1$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4- Démontrer par récurrence que :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$

5- On pose $\forall n \geq 1, U_n = \frac{2^n}{n!}$

a- Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et prouver que $\forall n \geq 3$

$$U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$$

b- En déduire que pour tout $n \geq 3$,

$$0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

6- En déduire la limite de la suite (U_n) puis celle de la suite (I_n) .

7- Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right)$$

Exercice : 29

1- Déterminer les réels a, b et c vérifiant $\forall n > 0$
 $t \in \mathbb{R} \quad t > 0$ l'égalité :

$$\frac{1}{t(1+t^n)} = \frac{a \cdot t^{n-1} + b}{1+t^n} + \frac{c}{t}$$

2- Donner une primitive de l'application f_n sur $]0; +\infty[$ définie par : $f_n(t) = \frac{1}{t(1+t^n)}$

3- Démontrer que $\int_1^2 f_n(t) dt = \ln \left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}} \right)$

4- Au moyen d'une I.P.P., calculer : $\int_1^2 \frac{t^{n-1} \times \ln t}{(t^n+1)^2} dt$

Exercice : 30

Soit $\alpha > 0$, on pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$

1- Calculer $I(\alpha)$ en fonction de α puis $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$

2- on pose $J(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} dt$. en utilisant une I.P.P., exprimer $J(\alpha)$ en fonction de α et $I(\alpha)$ puis en fonction de α et déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J(\alpha)$.



BONNE CHANCE