

EXERCICES PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

EXERCICE 01 :

Trouver une primitive de chacune des fonctions f définies par

$$1^{\circ}) f(x) = -x^3 + 6x^2 + 10x - 4 \quad ; \quad 2^{\circ}) f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x$$

$$3^{\circ}) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x + 1 \quad ; \quad 4^{\circ}) f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5x + 7$$

$$5^{\circ}) f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^3 \quad ; \quad 6^{\circ}) f(x) = (6x + 3)(x^2 + x + 1)^4$$

$$7^{\circ}) f(x) = 5x(x^2 + 1)^6 \quad ; \quad 8^{\circ}) f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^5$$

$$9^{\circ}) f(x) = 7x^2(x^3 + 5)^3 \quad ; \quad 10^{\circ}) f(x) = x(x^2 - 4)^2$$

$$11^{\circ}) f(x) = (5x + 1)^7 \quad ; \quad 12^{\circ}) f(x) = (-3x + 2)^4$$

$$13^{\circ}) f(x) = (x - 4)^3 \quad ; \quad 14^{\circ}) f(x) = (5 - 2x)^6$$

$$15^{\circ}) f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x - 3)^3} \quad ; \quad 16^{\circ}) f(x) = \frac{3}{(5x - 1)^2}$$

$$17^{\circ}) f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^4} \quad ; \quad 18^{\circ}) f(x) = \frac{-x}{(x^2 - 9)^5}$$

$$19^{\circ}) f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2)^3} \quad ; \quad 20^{\circ}) f(x) = 5 + x + \frac{4}{(x + 1)^2}$$

$$21^{\circ}) f(x) = \frac{3x}{(x^2 + 2)^3} \quad ; \quad 22^{\circ}) f(x) = -x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{(x + 3)^2}$$

$$23^{\circ}) f(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 3x^2 + 2}{x^2} \quad ; \quad 24^{\circ}) f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 1}{3x^2}$$

$$25^{\circ}) f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{(x + 1)^2} \quad ; \quad 26^{\circ}) f(x) = (x^3 - 7x + 1)^5 (3x^2 - 7)$$

$$27^{\circ}) f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad ; \quad 28^{\circ}) f(x) = \sin x \cos^4 x$$

$$29^{\circ}) f(x) = \frac{\sin x}{\cos^4 x} \quad ; \quad 30^{\circ}) f(x) = \cos x \sin^4 x$$

$$31^{\circ}) f(x) = \sin 3x \quad ; \quad 32^{\circ}) f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$33^{\circ}) f(x) = 4 \cos 2x \quad ; \quad 34^{\circ}) f(x) = \cos(6x + 2)$$

$$34^{\circ}) f(x) = \cos 3x + 6 \sin 3x - \sin x \cos^3 x \quad ; \quad 35^{\circ}) f(x) = \cos^5 x$$

$$36^{\circ}) f(x) = 10 \sin 5x + 12 \cos 4x - 3 \sin\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad 37^{\circ}) f(x) = \sin^4 x$$

EXERCICE 02:

1- Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_{-3}^2 (x^4 - 5x^2 + 3) dx ; B = \int_0^1 (x+3)(x^2 + 6x + 4)^2 dx ; K = \int_0^1 (x+1)^n dx ;$$

$$C = \int_1^2 \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2} dx ; D = \int_0^2 (2x+1)^3 dx ; E = \int_1^2 \frac{3x+6}{(x^2 + 4x + 3)^4} dx ; T = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx$$

$$F = \int_0^1 \frac{3}{(3-2x)^4} dx ; G = \int_2^3 (3x^2 - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}) dx ; J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx ;$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx ; N = \int_0^1 x(x^2 + 1)^5 dx ; P = \int_{-2}^1 \sqrt{x+3} dx ; D = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(x) dx$$

$$Q = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx ; R = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) dx ; U = \int_0^1 (x + e^x) dx ; K = \int_{-1}^0 (x^2 + x) e^{2x} dx$$

$$V = \int_0^1 \frac{3x}{x^2 + 4} dx ; W = \int_1^2 \frac{10x+1}{\sqrt{5x^2 + x + 3}} dx ; X = \int_0^{\pi} \cos x (1 - 3\sin^2 x) dx ; W = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{\cos(x)} dx$$

$$I = \int_1^2 (\sqrt{3x-2}) dx ; J = \int_1^2 x(x^2 - 3) dx ; L = \int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx ; L = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - x^4} dx ;$$

$$A = \int_3^5 \left(2x - 1 + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx ; B = \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right) dx ; E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^5 x dx ; K = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x dx ;$$

$$M = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x dx ; N = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} ; P = \int_0^1 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx ; Q(x) = \int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 3)^3} dx ;$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos x + 1)^2 dx ; T = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx ; P = \int_{-3}^4 |x^2 - 2x - 3| dx ;$$

$$K = \int_{-1}^4 (|x^2 - 2x| + 3) dx ; D = \int_{-4}^1 (|x+3| + |2x-1|) dx ; T = \int_{-5}^7 (|x+3| + 2|x^2 - 3x + 2|) dx ;$$

$$G = \int_0^5 (|2x-5| + |x-3|) dx ; U = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 4t dt ; Y = \int_{-1}^3 (x |x^2 - x - 2|) dx ;$$

EXERCICE 03:

En utilisant la formule d'intégration par parties calculer les intégrales

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx ; J = \int_0^1 x^2 e^x dx ; M = \int_0^1 (-2x^2 + x + 1) e^x dx ; I = \int_1^2 x \sqrt{2x+1} dx$$

$$P = \int_0^1 (x+1) \sqrt{2x+1} dx ; T = \int_1^x \ln t dt ; S = \int_e^{2e} x \ln x^2 dx ; P = \int_1^2 x \ln x dx ;$$

$$C = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx ; H = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx ; F = \int_1^e (t^2 + 3) \ln t dt ; I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx ;$$

$$H = \int_0^1 t^2 e^t dt ; J = \int_0^{\pi} (3t^2 - t + 1) \sin t dt ; R = \int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx ; V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 3x dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos(2x) dx ; J = \int_0^1 (x+2) e^x dx ; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx .$$

EXERCICE 04:

Soient la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2}$

- 1) Trouver les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$
- 2) Trouver la primitive F de f prenant la valeur $-\frac{5}{2}$ en 0.
- 3) En déduire $I = \int_2^3 f(x) dx$.

EXERCICE 05:

Soit Soient la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$

- 1) Trouver les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$
- 2) En déduire $I = \int_1^2 f(x) dx$.

EXERCICE 06:

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

a) Trouver les réels a et b tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$

b) En déduire le calcul de $I = \int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2} dx$.

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

a) Trouver les réels a , b et c tels que pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

b) En déduire le calcul de $J = \int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx$.

3) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Trouver les réels a et b tels que, $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$

c) En déduire le calcul de $K = \int_0^2 \frac{x+5}{x^2-2x-3} dx$.

EXERCICE 07:

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin^2 x dx$

- a) Calculer $I + J$ puis $I - J$
- b) En déduire les valeurs de I et de J .

1) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout réel strictement

positif x on ait : $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

2) Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$; en déduire en utilisant l'intégration par partie

le calcul de $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)}{x(x^2+1)} dx$

3) Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

a) Calculer I_0

b) Pour tout entier naturel n , en utilisant une intégration par parties,

c) Calculer I_{n+1} en fonction de I_n . En déduire I_4 .

EXERCICE 08:

Pour tout entier naturel $n > 0$; on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{3+x} dx$

1) a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

2) Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3) a) En procédant par encadrement, établir que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

b) Etudier la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.

4) a) Démontrer que, pour tout nombre x de $[0 ; 1]$ on a :

$$0 \leq 2 - \sqrt{x+3} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$$

b) Déduisez du résultat précédent que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (nI_n) .

EXERCICE 09:

Soit f une fonction numérique continue sur $[0 ; 1]$ et telle que pour tout x de $[0 ; 1]$ $\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$. Soit F une primitive de f sur $[0 ; 1]$.

1°) Prouver que : $F(1) = \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$.

2°) En déduire que : $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

3°) En déduire que : $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq \frac{1}{3}$.

4°) Soit h définie par $h(x) = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

Démontrer que pour n élément de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq h(x) \leq \frac{1}{n+1}$.

EXERCICE 10:

1) Soit la fonction f continue sur $[0 ; 1]$ telle que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$ on a : $\frac{1}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$.

Démontrer que : $\ln 1,5 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \ln 2$.

2) Pour tout entier naturel n on donne $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ (on remarquera que $\forall x \in [0,1], 0 \leq x^n \sin(\pi x) \leq x^n$)

b) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 I_n)$.

EXERCICE 11:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-1}{|x^2-2x|+1}$ et m un réel supérieur à 2.

Calculer $\int_1^2 f(x)dx$, puis $\int_1^m f(x)dx$.

Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; m]$.

EXERCICE 12:

Pour tout entier naturel non nul n , on définit : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1-/ a/ justifier l'existence de cette intégrale.

b/ Calculer I_1 .

c/ Démontrer la relation : pour $n \geq 2$, $I_n = e - nI_{n-1}$.

(on pourra effectuer une intégration par parties).

2-/ l'entier naturel non nul n étant fixé, on note F_n une primitive de la fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a/ Démontrer que la fonction $t \mapsto F_n(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa fonction dérivée.

b/ En déduire les propriétés suivantes :

- Pour tout entier naturel non nul $I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 t^n e^t dt$.

- Pour tout entier naturel non nul $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Indication : pour la deuxième propriété, encadrer d'abord $t^n e^t$ sur $[0 ; 1]$.

EXERCICE 13:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la fonction

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$

1) indiquer sans calcul $f'(x)$ et $f(0)$;

2) Etudier les variations de f ;

3) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = x + \ln(e^{-x} + 1) - \ln 2$

En déduire que la droite d'équation : $y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .

4) Construire dans le plan la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f .

EXERCICE 14:

Le but de l'exercice est de montrer que le nombre e , base des logarithmes népériens, n'est pas un nombre rationnel.

Partie A :

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x e^{1-x}$.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 4cm.

1-/ Etudier les variations de f ; on précisera les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2-/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan.

3-/ Utiliser une intégration par parties pour calculer : $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$.

Quelle est l'interprétation géométrique de I_1 .

Partie B :

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1-/ a/ Montrer que $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$, pour tout x de $[0 ; 1]$.

b/ Exprimer en fonction de l'entier n : $J_n = \int_0^1 x^n dx$.

c/ Dédire de a/ et de b/ que l'on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ pour $n \geq 1$.

2-/ Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

3-/ Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $k_n = n!e - I_n$.

a/ Exprimer k_{n+1} à l'aide de k_n .

b/ Calculer k_1 (on pourra utiliser la 3^{ème} question de la partie A).

En déduire, en procédant par récurrence sur n , que k_n est un nombre entier pour $n \geq 1$.

c/ Utiliser le b/ et le 1-/ c/ pour montrer que, quelque soit l'entier $n \geq 2$, le nombre $(n! \times e) = k_n + I_n$ est un entier.

4-/ a/ Soit p et q deux nombres entiers strictement positifs.

Montrer que, pour $n \geq q$, le nombre $\frac{n!p}{q}$ est un nombre entier.

b/ En déduire, à l'aide du 3-/ b/ et 3-/ c/ que e n'est pas un nombre rationnel.

EXERCICE 15:

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx$. (on indique $\sin^n x = \sin^{n-1} \times \sin x$)

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Sans calculer I_n , démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3) A l'aide d'une intégration par parties de I_n démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4) a) Calculer I_9 ; I_{10} et I_{11}

b) En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$.

EXERCICE 16:

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$.

1) A l'aide d'une intégration par parties trouver une relation entre I_n et I_{n-1}

2) Calculer I_0 .

3) Calculer I_n .

EXERCICE 17:

Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} dx$

1) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{a \cos(x)}{1 - \sin(x)} + \frac{b \cos(x)}{1 + \sin(x)}$.

En déduire le calcul de $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx$.

2) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$

EXERCICE 18:

On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx \quad ; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

1°) Calculer $I - J$ et $I + J + K$.

2°) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

En déduire la valeur de $I + J - 3K$ puis celles de I ; J ; K .

EXERCICE 19:

On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx$ et $I_2 = I_1 + I$.

1°) Calculer I_2

2°) Calculer I_1

3°) En déduire I .

EXERCICE 20:

On considère les intégrales définies $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$.

1°) a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$.

c) Montrer aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$.

2°) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Montrer que $J - I = 0$

c) En déduire les valeurs des intégrales I et J .