

TD Primitives – Intégrales. TSEXP

Primitives

Primitives directes

1 Calcule l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$; 2) $f(x) = (x^2 - 3)^3$; 3) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$
4) $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$; 5) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2$
7) $f(x) = \cos(-6x + 5)$; 8) $f(x) = 3\sin(1 - 4x)$; 9) $f(x) = \frac{1}{3\cos^2 x}$
10) $f(x) = (-x + 1)(2x^2 - 4x + 1)^2$; 11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6x + 5}}$; 12) $f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3}$
13) $f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2$; 14) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$; 15) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$
16) $f(x) = \cos^5 2x$; 17) $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$

Primitives vérifiant une condition

2 Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

- 1) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et $F(0) = 7$
2) $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$ et $F(0) = 0$
 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

3 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$

- 1) Détermine l'ensemble de définition
2) Détermine les réels a ; b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$
3) En déduis la primitive de f qui s'annule en 0

4 1) Soit les fonctions f et F définies par :

$$f(x) = x\sqrt{3 - 2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$$

Détermine les réels a ; b et c tel que $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de f sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

2) Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{x + 1} - \ln(1 + \sqrt{x + 1}) \text{ et } g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x + 1}}$$

a-Détermine l'ensemble de définition des fonctions f et g .

b-Calculer $f'(x)$ puis en déduis la primitive G de la fonction g qui prend la valeur $-\ln 4$ en 0.

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive directe

En utilisant les formules des primitives, calcule les intégrales suivantes :

- 5** 1) $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx$; 2) $I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$; 3) $I = \int_{-1}^0 \frac{-2}{(3x-1)^2} dx$
4) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)dx$; 5) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$; 6) $I = \int_0^4 \sqrt{4x+9} dx$
7) $I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx$; 8) $I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx$
9) $I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx$; 10) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos(2x)| dx$; 11) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx$
12) $I = \int_0^2 \frac{3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2} dx$; 13) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^4}{\sin^3 x} dx$; 14) $I = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\cos x + \sin x + 2} dx$

Intégrations par parties

En utilisant la formule de l'intégration par partie, calcule les intégrales suivantes :

- 6** 1) $I = \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$; 2) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$; 3) $I = \int_0^4 x \sqrt{4x+9} dx$
4) $I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx$; 5) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx$
- 7** Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x dx$
1) Calcule $I + J$.
2) Calcule $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3) Dédus de ce qui précède la valeur de I et J .

Intégrations par changement de variable

En utilisant un changement de variable, calcule les intégrales suivantes :

8 1) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$; 2) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

9 Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

- 1) Montre que -2 est un zéro double de p .
2) En utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calcule l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx$

Intégrales paramétriques.

10 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

- 1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-2}
(On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$).
2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calcule : I_2 et I_4

11 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($n \geq 0$)

- 1) Calcule I_0
2) En intégrant par parties, montre que $\forall n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
3) En déduis la valeur de I_1 ; I_2 et I_3 .

12 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) Démontre que $I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$ puis calcule I_0

2) Démontre que $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

13

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

1) Détermine le seul réel a tel que : $\forall x \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ on a : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}$.

2) Calcule la valeur de I_0 .

3) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

14

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

1) Calcule I_1 .

2) En intégrant par parties, montre que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \cdot x^{n-1}$)

15

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}} dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante et majorée.

2) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$. En déduis la limite de la suite I_n .

16

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t dx$ ($n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

1) En utilisant une intégration par parties ; calcule $I_n(x)$

2) En déduis le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$

3) a) Calcule $I_n(e) - J_n(e)$.

b) Détermine la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

17

Soient p et n deux entiers naturels.

On pose $I_{n;p} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$.

1) Calcule $I_{n;0}$ et $I_{n;1}$.

2) Calcule $I_{0;n}$ puis en déduis $I_{1;n}$.

3) Montre que $I_{n;p} = I_{p;n}$ en faisant un changement de variable affine.

4) En déduis la relation $I_{p;n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1;n-1}$

Intégrales linéaires

18

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Calcule I

2) Soit la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Montre que $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) En déduis une relation entre I et J .

c) Calcule J .

19 Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \text{ et } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

- 1) Calcule $I - J$; $I + J + K$ et $I + J - 3K$
- 2) En déduis les valeurs de I ; J et K .

20 Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Calcule $I + J$ et $I - J$ puis en déduis les valeurs de I et J .

21 On se propose de calculer l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

- 1) Calcule les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$
- 2) Détermine les réels a ; b et c tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ **(1)**
- 3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité **(1)**, calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$
- 4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprime J en fonction de I .
b- En déduis la valeur de J .

22 On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

- 1) a- Montre que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$
b- A l'aide d'une intégration par parties, montre que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$
c- Montre de même que $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$
- 2) a- Montre que $I + J = \frac{3\pi}{4}$ et $J - I = 0$
b- En déduis les intégrales I et J .

23 On considère l'intégrale $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$ avec $t \in]-1 ; 1[$

- 1) a- Détermine les réels a ; b et c tels que : $\frac{t^2}{1-t^2} = a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$
b- En déduis l'expression de $F(x)$ et $F'(x)$
- 2) On pose $f(\alpha) = F(\sin \alpha)$ avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$
a- Calcule $f'(\alpha)$ puis en déduis la valeur de $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} d\alpha$
b- A l'aide d'une intégration par parties, calcule $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \alpha \ln(\cos \alpha) d\alpha$

Calculs de valeurs moyennes

24 L'intensité du courant qui circule dans une bobine en fonction du temps t , a été modélisée par la fonction i telle que pour tout t appartenant à une période T , on a : $i(t) = 5 \cos(100\pi t)$.
Détermine la valeur moyenne de l'intensité du courant entre les instants $t_1 = 0$ s et $t_2 = 3$ s

25 La variation de la température de la larve d'un volcan, a été modélisée par la fonction f telle que pour tout $t \in [10 ; 30]$, $f(t) = 3t^2 + 2t$ où t est exprimé en degré Celsius.
Qu'elle est la température moyenne de la larve entre 10°C et 30°C

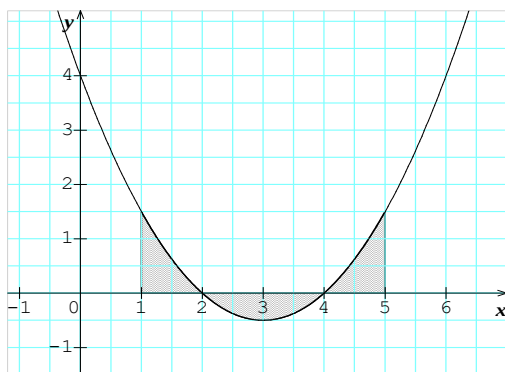
- 26** À la suite d'un début de contamination de la maladie **CORONAVIRUS** dans une ville, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie t jours après l'apparition des premiers cas est donné par : $f(t) = 45t^2 - t^3$ Avec $t \in [0 ; 25]$.
Calcule le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

Calcul de la valeur approchée d'une intégrale : théorème des rectangles

- 27**
- 1) En utilisant la méthode des rectangles, détermine une valeur approchée d'amplitude 0,2 de l'intégrale $I = \int_1^0 \frac{1}{1+x^2} dx$
 - 2) En utilisant la méthode des rectangles, détermine une valeur approchée d'amplitude 0,5 de l'intégrale $I = \int_1^5 \frac{1}{x} dx$.

Calculs d'aires

- 28** On considère la courbe ci-dessous représentant une fonction polynôme f de degré 2 dans un repère orthonormé $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique : $2cm$.



- 1) Détermine l'expression explicite de f .
- 2) En déduis en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée sur le graphique.

- 29** Soient $f: \mapsto 2x^2 - 2x + 1$ et $g: \mapsto x^3 - 3x + 3$ deux fonctions de courbes représentatives respectives (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique : $2cm$.

- 1) Etudie les fonctions f et g puis représente (C_f) et (C_g) dans le même repère.
- 2) Calculons puis hachure l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du plan délimité par les courbes (C_f) et (C_g) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$