Ex1) 1)

f_1 continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}: f_1(x) = x^3 + 4x - 1$

donc une primitive primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est

$$F: x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + 4\frac{x^2}{2} - x$$

2) f_2 est c sur $\mathbb{R}$ donc admet ds Primitives & $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}: f_2(x) = 4(4x-1)^{10}$

Sous Forme $u'u^{10}$ avec $u(x) = 4x-1$

$d=4$

donc une primitive de f_2 sur $\mathbb{R}$

est $F_2 : x \mapsto \dfrac{u(x)^{11}}{11} = \dfrac{(4x-1)^{11}}{11}$

3) f_3 continu sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_3(x) = 2x\left(x^2-7\right)^{2026}$$

Sous forme $u'u^{2026}$

donc Une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$

est $F: x \mapsto \frac{(x^2-7)^{2027}}{2027}$

4) f contin sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2(x^3+1)^{47}$

$= \frac{1}{3} 3x^2(x^3+1)^{47}$

$= \frac{1}{3}\left[u'(x)\right] u^{47}(x)$

on pose $u(x) = x^3+1$

donc $u'(x) = 3x^2$

donc une primitive de f_4 sur $\mathbb{R}$ est

$$F_4 : x \longmapsto \frac{1}{3}\frac{U^{48}(x)}{48}$$

5) f_5 continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitive sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_5(x) = x^3(x^2+1)^{2020}$$

$U(x) = x^2+1$

$U'(x) = 2x$

$$= x\, x^2 (x^2+1)^{2020}$$

$$= x\left((x^2+1)-1\right)(x^2+1)^{2020}$$

$$= \frac{2x}{2}(x^2+1)^{2021} - \frac{2}{2}x(x^2+1)^{2020}$$

$$= \frac{1}{2}\left[U'(x)U^{2021}(x) - U' \times U^{2020} \right]$$

donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

$$F : x \longmapsto \frac{1}{2}\left[\frac{U^{2022}(x)}{2022} - \frac{U^{2021}(x)}{2021} \right]$$

6) f continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$

$= x^3 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ | on pose $U(x) = x^2+1$, $U'(x) = 2x$

$= x \, x^2 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= x \, (x^2+1-1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{U'(x)}{2}$ $\frac{U'(x)}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[U'(x) U(x)^{\frac{1}{2}} - U'(x) U(x)^{-\frac{1}{2}} \right]$

donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

$$F : x \longmapsto \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}U^{\frac{3}{2}}(x) - 2U^{\frac{1}{2}}(x)\right]$$

7) f continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

$$= -\cos'(x)\cos(x)$$

donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto -\frac{\cos^2(x)}{2}$

8) f_8 continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}: f_8(x) = \cos^5(x)$

$= \cos^4(x) \cdot \cos(x)$

$= \left(\cos^2(x)\right)^2 \cos(x)$

$= \left(1 - \sin^2(x)\right)^2 \cos(x)$

$= \left[1 - 2\sin^2(x) + \sin^4(x)\right] \cos(x)$

$= \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) + \cos(x)\sin^4(x)$

$u'(x)$ $u^2(x)$ $u'(x)$ $u^4(x)$

donc une primitive de f_8 sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto \sin(x) - 2\frac{\sin^3(x)}{3} + \frac{\sin^5(x)}{5}$$

9) f_9 continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_9(x) = \cos^4(x)$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left[e^{4ix} + 4e^{2ix} + C_4^2 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right]$$

Euler

Euler

$$= \frac{1}{2^4}\left[2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

$$F : x \mapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$

Ex 2)

1) f continue sur I donc admet primitive

sur I

$\forall x \in I$

$$* \quad f(x) = \frac{1+\sin(x)}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}$$ (conjugué)

$$\frac{1+\sin(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\cos^2(x)}}_{\text{tan}'} - \underbrace{(-\sin(x))}_{u'(x)}\underbrace{\cos^{-2}(x)}_{u^{-2}(x)}$$

Les primitives de $\sin I$ s'écrivent

$$\overline{x \longmapsto \tan(x) - \frac{\cos^{-1}(x)}{-1}} + C$$

$$= \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

2) f continue sur I donc admet des primitives sur I

$\forall x \in I$: $f(x) = \dfrac{\tan^2(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$

$g \circ V(x)$

$V'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\left[\tan^2(\sqrt{x+1})+1-1\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left[\tan^2(\sqrt{x+1})+1\right] - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]$$

$V'(x)$ $\tan'(V(x))$ $U'(x)(U(x))^{-\frac{1}{2}}$

$U(x)$: 1

Les primitives de f sur I s'écrivent

$F : x \mapsto \tan(\sqrt{x+1}) - 2\sqrt{x+1} + C$

$C \in \mathbb{R}$

3) f cont sur $]0;+\infty[$

donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$

$u(x)$ $v(x)$ $u'(x)$ $v'(x)$

$\forall x \in I : f(x) = \dfrac{2(\cos(x) - (\sin(x)) \times 1}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

avec

$v(x) = x$

$u(x) = \sin(x)$

donc Les primitives de f sur I s'écrivent

$F(x) \to \frac{\sin(x)}{x} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

2) f continue sur I donc admet des primitives sur I

$\forall x \in I \quad f(x) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^4\left(\frac{x}{2}\right)$

$= \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

on pose $U(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$U'(x) = \frac{1}{2}\left[\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]$

$f(x) = 2\,U'(x)\,U^2(x)$

donc les primitives de f sur I s'écrivent

$$F : x \longmapsto 2\,\frac{U^3(x)}{3} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

5) f cont sur I
donc admet ...

$\forall x \in I : f(x) = \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)^2 = \left(1 + \tan^2(x)\right)^2$

$$= 1 + \tan^4(x) + 2\tan^2(x)$$

$$= 1 + \tan^2(x) + \tan^4(x) + \tan^2(x)$$

question 4

$$= \underbrace{1 + \tan^2(x)}_{\tan'(x)} + \tan^2(x)\left[1 + \tan^2(x)\right]$$

$\tan'(x)$ $\quad$ $\tan^2(x)$ $\tan'(x)$

Les primitives de f sur I s'écrivent

$$F(x) \mapsto \tan(x) + \frac{\tan^3(x)}{3} + C$$

$C \in \mathbb{R}$

6) f cont sur I donc admet ...

$\forall x \in I : f(x) = \frac{-3}{-3x^2} \sin\left(\frac{3}{x}\right)$

$u(x)$

$u'(x) = -\frac{3}{x^2}$

$= -\frac{1}{3} u'(x) \sin(u(x))$

$\sin = -\cos'$

donc les primitives de f sur I

$F(x) \to \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3}{x}\right) + C$

$C \in \mathbb{R}$

Ex3)

1) f contin sur $\mathbb{R}$ donc admt une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ tq $F(0)=0$

2) Montrons que F est impaire

$\forall x \in D_f \quad -x \in D_f$

on pose $\psi(x) = F(x) + F(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ψ dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \psi'(x) = f(x) - f(-x)$

$= f(x) - f(x) = 0$ car f paire

donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\psi(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

a) $\psi(0) = F(0) + F(0) = 0$ donc $c = 0$

$0 \quad 0$

et donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = 0$

donc $F(x) = -F(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

F est impaire

b) $F' = f > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc F strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

3)a)

$x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$

$\frac{1}{x} \in]0,+\infty[\quad \forall x \in]0,+\infty[$

et F dérivable sur $]0,+\infty[$

$\Big) \; x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ dérivable sur $]0,+\infty[$ par composée

h est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x \in]0,+\infty[$: $h'(x) = f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$

$= 0$

Par passage au primitive

$\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x > 0 ; \; h(x) = c$

d'où $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x > 0$

$$F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = c$$

c) $\forall x > 0 : F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right)$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) = 0$ (Par continuité en 0)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} F = c$

4) a) Facile

b)

On pose $\varphi(x) = F(x) - g^{-1}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

g^{-1} dérivable sur $\mathbb{R}$

car g est sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tg $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(g^{-1}(x))+1}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

Donc ψ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\psi'(x) = f(x) - \frac{1}{1+x^2} = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

ψ est constante sur $\mathbb{R}$

donc $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}$

$\psi(x) = \alpha$ or $\psi(0) = 0$

car $F(0) = 0$

$g^{-1}(0) = 0$ car $\tan(0) = 0$

$g(0)$

donc $\alpha = 0$

d'où $\Psi = 0$

et donc $F = g^{-1}$

c) $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = F(1) = \frac{\pi}{4}$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow F(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$= \frac{\pi}{6}$

d) d'après question 3)

$\times$ $F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = C \Rightarrow 2F(1) = C$ $\quad = \frac{\pi}{4}$

$C = \frac{\pi}{2}$

on bien

$$F(\sqrt{3}) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = C$$

$\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ donc $C = \frac{\pi}{2}$

on bien

$$\lim_{+\infty} g^{-1} = \frac{\pi}{2} \text{ car } \lim_{\frac{\pi}{2}^-} g = +\infty$$

donc $\lim_{+\infty} F = \frac{\pi}{2} = C$

Ex 4)

1) même Repon

2) soit $x > 0$

F contin $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$

dériv sur $]\sqrt{x}, \sqrt{x+1}[$

donc $\exists c_x \in]\sqrt{x}, \sqrt{x+1}[$ tq

$$F'(c_x) = \frac{F(\sqrt{x+1}) - F(\sqrt{x})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

(d'après TAF)

donc $\exists c_x \in]\sqrt{x}, \sqrt{x+1}[\; ; \; \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = F(\sqrt{x+1}) - F(\sqrt{x})$

D'autre part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} c_x = +\infty$

car $c_x \in]\sqrt{x}, \sqrt{x+1}[$

et $\lim\limits_{+\infty} f = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(c_x) = l$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(c_x)\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(\sqrt{x+1}) - F(\sqrt{x}) = 0$

3) a) $x \in]1,+\infty[$

G cont $[1,\sqrt{x}]$

dérivable $]1,\sqrt{x}[$

$\forall t \in]1,\sqrt{x}[$

$G'(t) = 1 - f(t) = 1 - \frac{t-1}{t}$

$= \frac{1}{t}$

$0 < G'(t) < 1$

TAF $\forall x > 1 \quad 0 < \frac{G(\sqrt{x}) - G(1)}{\sqrt{x} - 1} < 1$

$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq G(\sqrt{x}) - \int_1^{\sqrt{x}} f(t)\,dt \leq \sqrt{x} - 1$

$1 - F(1) = 0$

$\forall x > 1 \quad 0 \leq G(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$ (*)

Si $x = 1$ $\quad G(1) = 0$

(*) Vérifiée

$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq G(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$

b) On pose : $\forall x > 0 \quad \psi(x) = G(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} G(x)$

ψ dl sur $]0,+\infty[$ et

$\forall x>0 : \psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} G'(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} G'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = 0$

($\sqrt{x}\sqrt{x} = x$)

ψ cte sur $]0,+\infty[$

$\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall x>0$

$\psi(x) = c$

$\psi(1) = G(1) - \frac{1}{2}G(1)$ ($G(1) \geq 0$, $\frac{1}{2}G(1) \geq 0$)

$= 0$

donc $c=0$ et $\forall x>0$

$$g(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} g(x)$$

d'après 3)a)

$$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq g(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}-1$$

$$\Rightarrow \left(0 \leq \frac{1}{2} g(x) \leq \sqrt{x}-1\right) \times 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{2}{x}(\sqrt{x}-1)$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = 0$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

M A T H I N G E N I E U R