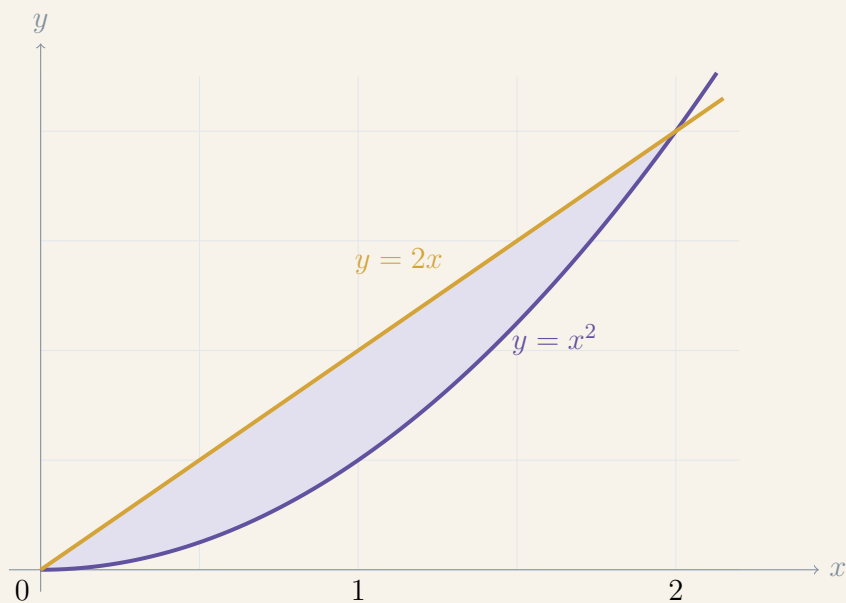


CALCUL INTÉGRAL

2^e Bac Sciences Physiques

Calculer une intégrale, mesurer une aire.

DU COURS AU RAISONNEMENT



$$\mathcal{A} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$$

6

ÉPREUVES

24

EXERCICES

30

PAGES

QCM · Questions à rédiger · Barèmes sur 20 · Corrigés courts

MODE D'EMPLOI

Six épreuves pour progresser

Un format régulier

Chaque épreuve comporte un QCM de 4 points et trois exercices de 5, 5 et 6 points. Total : 20 points. Les sujets occupent deux pages ; les corrigés suivent sur deux pages.

Comment travailler

1. Respecter la durée indicative et masquer les pages de correction.
2. Pour le QCM, choisir une seule réponse. Pour les autres exercices, rédiger les étapes essentielles.
3. Comparer sa méthode au corrigé, puis refaire les questions manquées sans aide.

Sommaire et progression

N°	Épreuve	Durée	Sujet	Corrigé
01	Des primitives aux intégrales	60 min	5	7
02	Linéarité, signe et encadrement	70 min	9	11
03	Reconnaître une composition	75 min	13	15
04	Intégration par parties	80 min	17	19
05	Aires et valeurs moyennes	80 min	21	23
06	Bilan de chapitre	90 min	25	27

Fiches méthode : pages 3 et 4. Grille des QCM : page 29. Bilan personnel : page 30.

Barème et conventions

QCM : 1 point par bonne réponse ; 0 sinon, sans pénalité. Dans les exercices rédigés, les points indiqués sont répartis entre la méthode et le résultat. La démarche doit rester lisible.

Les sujets sont originaux, conçus pour l'entraînement ; ce ne sont pas des sujets officiels. Les angles sont en radians et les repères géométriques sont orthonormés, sauf indication contraire.

FICHE MÉTHODE 1 / 2

Calculer avec une primitive

1 • Définition pratique

Si f est continue sur $[a, b]$ et F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Écrire les deux substitutions avant de simplifier.

2 • Linéarité et Chasles

$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$; $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$. Inverser les bornes change le signe.

3 • Formes usuelles

Pour $n \in \mathbb{N}$, une primitive de x^n est $x^{n+1}/(n+1)$. Une primitive de e^{ax+b} est e^{ax+b}/a si $a \neq 0$. Sur $]0, +\infty[$, $1/x$ a pour primitive $\ln x$.

4 • Compositions

Reconnaître $u'u^n$, u'/u et $u'e^u$. Les primitives correspondantes sont $u^{n+1}/(n+1)$, $\ln |u|$ et e^u , sur un intervalle où les formules sont définies.

5 • Intégration par parties

Pour u, v de classe C^1 , $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$. Choisir le facteur à dériver pour rendre la seconde intégrale plus simple.

Un exemple à retenir

$\int_0^1 3x^2(x^3 + 1)^2 dx = [(x^3 + 1)^3/3]_0^1 = 7/3$. Le facteur $3x^2$ est la dérivée intérieure.

FICHE MÉTHODE 2 / 2

Interpréter et contrôler

1 · Signe et encadrement

Pour $a < b$, si $m \leq f \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$. Une fonction continue positive donne une intégrale positive ou nulle.

2 · Aire sous une courbe

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, l'aire sous la courbe vaut $\int_a^b f$. Si f change de signe, découper l'intervalle et intégrer $|f|$ pour obtenir l'aire géométrique.

3 · Aire entre deux courbes

Si $f \leq g$, l'aire vaut $\int_a^b (g - f)$. Si les courbes se croisent, déterminer leurs intersections, puis intégrer « courbe du haut moins courbe du bas » sur chaque morceau.

4 · Valeur moyenne

Pour $a < b$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$. Elle a la même unité que les valeurs de f .

5 · Borne variable et vérification

Si f est continue, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ vérifie $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$. Pour contrôler une primitive proposée, la dériver ; pour une aire, vérifier sa positivité et l'unité.

Un exemple à retenir

$\int_{-1}^1 x dx = 0$, mais l'aire entre la droite et l'axe sur $[-1, 1]$ vaut 1. Il faut additionner les deux triangles.

ÉPREUVE 01 · FONDAMENTAUX

Des primitives aux intégrales

Durée indicative : 60 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 $\int_0^1 2x \, dx$ vaut :**A.** 2**B.** $1/2$ **C.** 0**D.** 1**Q2** Pour f continue, $\int_a^a f(x) \, dx$ vaut :**A.** 0**B.** a **C.** 1**D.** $f(a)$ **Q3** Pour f continue sur un intervalle contenant a, b , $\int_b^a f$ vaut :**A.** $\left| \int_a^b f \right|$ **B.** $-\int_a^b f$ **C.** 0**D.** $\int_a^b f$ **Q4** Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $1/x$ est :**A.** $x \ln x$ **B.** $1/x^2$ **C.** $\ln x$ **D.** $-1/x$ **Exercice 2 · Trois calculs directs**

5 points

Pour chaque intégrale, indiquer une primitive.

1. Calculer $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) \, dx$.

(2 points)

2. Calculer $\int_1^e dx/x$.

(1 point)

3. Calculer $\int_0^{\ln 2} e^x \, dx$.

(2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 01 · FONDAMENTAUX · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Deux méthodes, un résultat

5 points

On pose $I = \int_0^1 (x+1)^2 dx$.

1. Calculer I avec une primitive de la forme $(x+1)^3/3$. (2 points)
2. Retrouver le résultat en développant le carré. (2 points)
3. Donner la valeur moyenne de $x \mapsto (x+1)^2$ sur $[0, 1]$. (1 point)

Exercice 4 · Une première aire

6 points

On compare les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0, 2]$.

1. Déterminer quelle courbe est au-dessus de l'autre. (2 points)
2. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = 0$, $x = 2$. (2 points)
3. Une unité sur l'axe horizontal mesure 2 cm, et une unité sur l'axe vertical 3 cm. Convertir cette aire en cm^2 . (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 01

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse D. Une primitive est x^2 ; on calcule $1^2 - 0^2$.

Q2 Réponse A. Les deux bornes sont identiques : $F(a) - F(a) = 0$.

Q3 Réponse B. Inverser les bornes change le signe.

Q4 Réponse C. $(\ln x)' = 1/x$.

Exercice 2 · Trois calculs directs

5 points

1. Une primitive est $x^3 - x^2 + x$. L'intégrale vaut $8 - 4 + 2 = 6$.

(2 points)

2. $[\ln x]_1^e = 1$.

(1 point)

3. $[e^x]_0^{\ln 2} = 2 - 1 = 1$.

(2 points)

Vérifier une primitive

Dériver l'expression trouvée. Puis calculer « valeur en haut moins valeur en bas ».

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 01

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Deux méthodes, un résultat

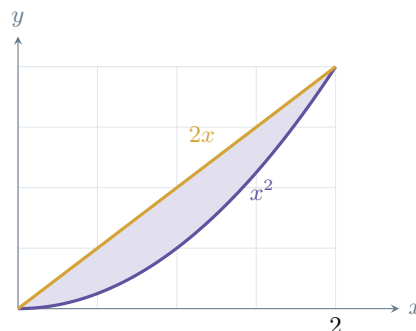
5 points

1. $I = [(x+1)^3/3]_0^1 = (8-1)/3 = 7/3$. (2 points)
2. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, donc $I = 1/3 + 1 + 1 = 7/3$. (2 points)
3. La longueur de l'intervalle vaut 1, donc la valeur moyenne est $7/3$. (1 point)

Exercice 4 · Une première aire

6 points

1. $g - f = 2x - x^2 = x(2-x) \geq 0$ sur $[0, 2]$. La droite est au-dessus de la parabole. (2 points)
2. $\mathcal{A} = \int_0^2 (2x - x^2) dx = [x^2 - x^3/3]_0^2 = 4/3$ unité d'aire. (2 points)
3. Une unité d'aire vaut $2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2$. L'aire est donc $(4/3) \times 6 = 8 \text{ cm}^2$. (2 points)



Exercice 4 : l'aire colorée vaut $4/3$ unité d'aire. Échelles adaptées.

Séparer signe et aire

Une intégrale peut être négative ; une aire géométrique est toujours positive ou nulle.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 02 · ENTRAÎNEMENT

Linéarité, signe et encadrement

Durée indicative : 70 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Si $I = \int_a^b f$ et $J = \int_a^b g$, alors $\int_a^b (2f - g)$ vaut :**A.** $2I + J$ **B.** $I - 2J$ **C.** $2IJ$ **D.** $2I - J$ **Q2** Si $\int_0^1 f = 3$ et $\int_0^1 g = 5$, alors $\int_0^1 (2f - g)$ vaut :**A.** 30**B.** 11**C.** 1**D.** -7**Q3** Si $a < b$ et $f \geq 0$ est continue sur $[a, b]$, alors :**A.** $\int_a^b f = 0$ toujours**B.** $\int_a^b f \leq 0$ toujours**C.** $\int_a^b f < 0$ **D.** $\int_a^b f \geq 0$ **Q4** Si $a < b$ et $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a, b]$, alors :**A.** $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ **B.** $\int_a^b f = M - m$ **C.** $M(b-a) \leq \int_a^b f \leq m(b-a)$ **D.** $m \leq \int_a^b f \leq M$ toujours

Exercice 2 · Assembler des intégrales

5 points

 f est continue sur $[0, 3]$ et vérifie $\int_0^1 f(x) dx = 2$ et $\int_1^3 f(x) dx = -1$.1. Calculer $\int_0^3 f(x) dx$.

(2 points)

2. Calculer $\int_3^0 f(x) dx$.

(1 point)

3. Calculer $\int_0^3 (2f(x) + 1) dx$.

(2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 02 · ENTRAÎNEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Encadrer puis calculer

5 points

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

1. Encadrer $1/(1+x)$ sur $[0, 1]$. (1 point)
2. En déduire un encadrement de I . (2 points)
3. Calculer I exactement et vérifier la cohérence du résultat. (2 points)

Exercice 4 · Intégrale signée et aire

6 points

On étudie $f(x) = x - 1$ sur $[0, 3]$.

1. Donner le signe de f . (1 point)
2. Calculer $I = \int_0^3 f(x) dx$. (2 points)
3. Calculer l'aire entre la droite, l'axe des abscisses et les bornes 0 et 3. (2 points)
4. Expliquer pourquoi $\mathcal{A} \neq |I|$. (1 point)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 02

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse D. C'est la linéarité de l'intégrale.

Q2 Réponse C. $2 \times 3 - 5 = 1$.

Q3 Réponse D. Une fonction positive a une intégrale positive ou nulle dans le sens croissant des bornes.

Q4 Réponse A. On intègre les deux constantes sur un intervalle de longueur $b - a$.

Exercice 2 · Assembler des intégrales

5 points

1. Par la relation de Chasles : $2 + (-1) = 1$.

(2 points)

2. On inverse les bornes : l'intégrale vaut -1 .

(1 point)

3. Par linéarité : $2 \times 1 + (3 - 0) = 5$.

(2 points)

Vérifier une primitive

Dériver l'expression trouvée. Puis calculer « valeur en haut moins valeur en bas ».

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 02

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Encadrer puis calculer

5 points

1. $1 \leq 1+x \leq 2$, donc $1/2 \leq 1/(1+x) \leq 1$. (1 point)
2. En intégrant sur un intervalle de longueur 1 : $1/2 \leq I \leq 1$. (2 points)
3. $I = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$. On retrouve donc $1/2 \leq \ln 2 \leq 1$. (2 points)

Exercice 4 · Intégrale signée et aire

6 points

1. $f < 0$ sur $[0, 1[$, $f(1) = 0$ et $f > 0$ sur $]1, 3]$. (1 point)
2. $I = [x^2/2 - x]_0^3 = 9/2 - 3 = 3/2$. (2 points)
3. $\mathcal{A} = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^3 (x-1) dx = 1/2 + 2 = 5/2$ unités d'aire. (2 points)
4. La partie négative est soustraite dans l'intégrale signée, mais ajoutée dans le calcul de l'aire. Ici $5/2 \neq 3/2$. (1 point)

Séparer signe et aire

Une intégrale peut être négative ; une aire géométrique est toujours positive ou nulle.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 03 · ENTRAÎNEMENT

Reconnaître une composition

Durée indicative : 75 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Une primitive de $2x/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$ est :

A. $\ln(x^2 + 1)$

B. $2 \ln(x^2 + 1)$

C. $\ln(x^2 + 1)/2$

D. $1/(x^2 + 1)$

Q2 $\int_0^1 2xe^{x^2} dx$ vaut :

A. $(e - 1)/2$

B. e

C. $e^2 - 1$

D. $e - 1$

Q3 Une primitive de $\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

A. $\sin(2x)$

B. $2 \sin(2x)$

C. $\sin(2x)/2$

D. $-\sin(2x)/2$

Q4 $\int_0^1 \frac{dx}{2x+1}$ vaut :

A. $2 \ln 3$

B. $\ln 2$

C. $\frac{1}{2} \ln 3$

D. $\ln 3$

Exercice 2 · Trois formes à reconnaître

5 points

Pour chaque calcul, préciser la fonction intérieure.

1. Calculer $\int_0^1 (3x^2 + 1)(x^3 + x + 1)^2 dx$.

(2 points)

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$.

(1 point)

3. Calculer $\int_0^1 e^{2x+1} dx$.

(2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 03 · ENTRAÎNEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Vérifier avant d'intégrer

5 points

On donne $F(x) = (x^2 + 1)^3/3$.

1. Calculer $F'(x)$. (2 points)
2. En déduire $\int_0^1 x(x^2 + 1)^2 dx$. (2 points)
3. Donner la valeur moyenne de $x(x^2 + 1)^2$ sur $[0, 1]$. (1 point)

Exercice 4 · Une exponentielle dans un quotient

6 points

On pose $f(x) = e^x/(1 + e^x)$ et $I = \int_0^{\ln 3} f(x) dx$.

1. Donner une primitive de f . (2 points)
2. Calculer I . (2 points)
3. En utilisant $1/2 \leq f(x) \leq 3/4$ sur $[0, \ln 3]$, encadrer $\ln 2$. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 03

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

- Q1 Réponse A.** On reconnaît u'/u avec $u = x^2 + 1 > 0$.
- Q2 Réponse D.** Une primitive est e^{x^2} : la différence vaut $e - 1$.
- Q3 Réponse C.** La division par 2 compense la dérivée intérieure.
- Q4 Réponse C.** Une primitive est $\frac{1}{2} \ln(2x + 1)$.

Exercice 2 · Trois formes à reconnaître

5 points

1. Prendre $u = x^3 + x + 1$, $u' = 3x^2 + 1$. Une primitive est $u^3/3$; le résultat vaut $(27 - 1)/3 = 26/3$. (2 points)
2. $[\ln(1 + x^2)]_0^1 = \ln 2$. (1 point)
3. $[e^{2x+1}/2]_0^1 = (e^3 - e)/2$. (2 points)

Vérifier une primitive

Dériver l'expression trouvée. Puis calculer « valeur en haut moins valeur en bas ».

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 03

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Vérifier avant d'intégrer

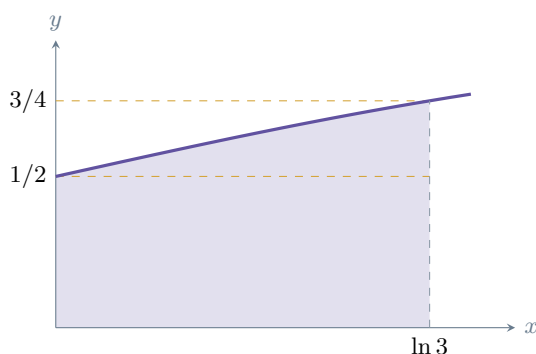
5 points

1. $F' = \frac{1}{3} \times 3(x^2 + 1)^2 \times 2x = 2x(x^2 + 1)^2$. (2 points)
2. La fonction intégrée vaut $F'/2$. L'intégrale est $(F(1) - F(0))/2 = (8/3 - 1/3)/2 = 7/6$. (2 points)
3. La longueur de l'intervalle étant 1, la valeur moyenne est $7/6$. (1 point)

Exercice 4 · Une exponentielle dans un quotient

6 points

1. $u = 1 + e^x > 0$ et $u' = e^x$. Une primitive est $\ln(1 + e^x)$. (2 points)
2. $I = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$. (2 points)
3. En intégrant : $\frac{1}{2} \ln 3 \leq I \leq \frac{3}{4} \ln 3$. Puis remplacer I par $\ln 2$. (2 points)



Exercice 4 : l'aire colorée vaut $\ln 2$; les rectangles donnent l'encadrement. Échelles adaptées.

Séparer signe et aire

Une intégrale peut être négative ; une aire géométrique est toujours positive ou nulle.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 04 · ENTRAÎNEMENT

Intégration par parties

Durée indicative : 80 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Pour u, v de classe C^1 sur $[a, b]$, $\int_a^b u'v$ vaut :

A. $[uv]_a^b - \int_a^b uv'$

B. $[uv]_a^b + \int_a^b uv'$

C. $[uv]_a^b$ toujours

D. $[u'v']_a^b$

Q2 $\int_0^1 xe^x dx$ vaut :

A. 0

B. $e - 1$

C. 1

D. e

Q3 Une primitive de $\ln x$ sur $]0, +\infty[$ est :

A. $x \ln x - x$

B. $(\ln x)^2/2$

C. $x \ln x$

D. $1/x$

Q4 $\int_0^\pi x \sin x dx$ vaut :

A. π

B. $-\pi$

C. 2π

D. 0

Exercice 2 · Un facteur affine

5 points

On pose $I = \int_0^1 xe^{2x} dx$.

1. Choisir u et v' pour une intégration par parties, puis donner v . (1 point)
2. Exprimer I à l'aide de $\int_0^1 e^{2x} dx$. (2 points)
3. Calculer I . (2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 04 · ENTRAÎNEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Le logarithme dans deux intégrales

5 points

On pose $J = \int_1^e \ln x \, dx$ et $K = \int_1^e x \ln x \, dx$.

1. Calculer J . (2 points)
2. Calculer K par une intégration par parties. (2 points)
3. Justifier $K > J$ sans approximation de e . (1 point)

Exercice 4 · Deux intégrations successives

6 points

On pose $J = \int_0^1 x e^x \, dx$ et $I = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

1. Retrouver J par intégration par parties. (2 points)
2. Exprimer I en fonction de J , puis calculer I . (2 points)
3. Pour $J_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, établir une relation entre J_n et J_{n-1} lorsque $n \geq 1$. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 04

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse A. On intègre l'identité $(uv)' = u'v + uv'$.

Q2 Réponse C. Une primitive est $(x-1)e^x$: la différence vaut $0 - (-1) = 1$.

Q3 Réponse A. La dérivée de $x \ln x - x$ vaut $\ln x + 1 - 1$.

Q4 Réponse A. Une primitive est $-x \cos x + \sin x$.

Exercice 2 · Un facteur affine

5 points

1. Prendre $u = x$, $u' = 1$, $v' = e^{2x}$ et $v = e^{2x}/2$.

(1 point)

2. $I = [xe^{2x}/2]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$.

(2 points)

3. $I = e^2/2 - (e^2 - 1)/4 = (e^2 + 1)/4$.

(2 points)

Vérifier une primitive

Dériver l'expression trouvée. Puis calculer « valeur en haut moins valeur en bas ».

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 04

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Le logarithme dans deux intégrales

5 points

1. $J = [x \ln x - x]_1^e = 0 - (-1) = 1.$ (2 points)
2. Prendre $u = \ln x$, $v' = x$. Alors $K = [\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_1^e = (e^2 + 1)/4.$ (2 points)
3. $K - J = \int_1^e (x - 1) \ln x \, dx > 0$: l'intégrande est continue et strictement positive sur $]1, e[.$ (1 point)

Exercice 4 · Deux intégrations successives

6 points

1. $J = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1.$ (2 points)
2. $I = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x \, dx = e - 2J = e - 2.$ (2 points)
3. Intégrer par parties avec $u = x^n$, $v' = e^x$ donne $J_n = e - nJ_{n-1}$. Le terme en 0 est nul car $n \geq 1.$ (2 points)

Séparer signe et aire

Une intégrale peut être négative ; une aire géométrique est toujours positive ou nulle.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 05 · APPROFONDISSEMENT

Aires et valeurs moyennes

Durée indicative : 80 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, avec $a < b$, l'aire entre leurs courbes vaut :

A. $\int_a^b (f + g)$

B. $\int_a^b (g - f)$

C. $\int_a^b (f - g)$

D. $g(b) - f(a)$

Q2 La valeur moyenne de f continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, est :

A. $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ toujours

B. $f(b) - f(a)$

C. $(b - a) \int_a^b f$

D. $\frac{1}{b - a} \int_a^b f$

Q3 $\int_0^\pi \sin x \, dx$ vaut :

A. π

B. 2

C. 0

D. 1

Q4 $\int_0^2 (x - 1) \, dx$ vaut :

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

Exercice 2 · Entre une courbe et sa tangente

5 points

On considère $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 + x$ sur $[0, 1]$.

1. Montrer que $f(x) \geq g(x)$ sur l'intervalle. (2 points)
2. Calculer l'aire entre les deux courbes sur cet intervalle. (2 points)
3. En déduire une minoration stricte de e . (1 point)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 05 · APPROFONDISSEMENT · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Une parabole au-dessus de l'axe

5 points

On pose $f(x) = -x^2 + 4x$ sur $[0, 4]$.

1. Donner les zéros et le signe de f . (1 point)
2. Calculer l'aire sous la courbe sur $[0, 4]$. (2 points)
3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0, 4]$. (2 points)

Exercice 4 · Deux courbes qui se croisent

6 points

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $[0, 2]$.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection. (2 points)
2. Donner la position relative sur $[0, 1]$ et $[1, 2]$. (1 point)
3. Calculer l'aire totale entre les courbes sur $[0, 2]$. (2 points)
4. Calculer l'intégrale signée $\int_0^2 (x^2 - x) dx$. (1 point)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 05

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

- Q1** Réponse B. On intègre la fonction du haut moins celle du bas.
- Q2** Réponse D. On divise l'intégrale par la longueur de l'intervalle.
- Q3** Réponse B. $[-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$.
- Q4** Réponse B. $[x^2/2 - x]_0^2 = 0$: les deux contributions signées se compensent.

Exercice 2 · Entre une courbe et sa tangente

5 points

1. Pour $h = e^x - x - 1$, $h(0) = 0$ et $h' = e^x - 1 \geq 0$ sur $[0, 1]$. Donc $h \geq 0$. (2 points)
2. $\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - 1 - x) dx = e - 1 - 1 - 1/2 = e - 5/2$ unités d'aire. (2 points)
3. L'aire est strictement positive, car $e^x > 1 + x$ sur $]0, 1]$. Ainsi $e > 5/2$. (1 point)

Vérifier une primitive

Dériver l'expression trouvée. Puis calculer « valeur en haut moins valeur en bas ».

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 05

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Une parabole au-dessus de l'axe

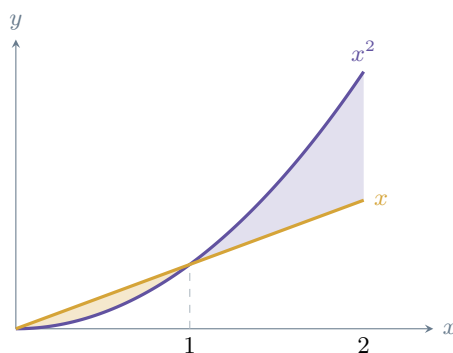
5 points

1. $f = x(4 - x)$: zéros 0 et 4, et $f \geq 0$ sur $[0, 4]$. (1 point)
2. $\mathcal{A} = [-x^3/3 + 2x^2]_0^4 = -64/3 + 32 = 32/3$ unités d'aire. (2 points)
3. $\mu = \mathcal{A}/4 = 8/3$. (2 points)

Exercice 4 · Deux courbes qui se croisent

6 points

1. $x^2 = x \iff x(x - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. (2 points)
2. $x - x^2 = x(1 - x)$: $g \geq f$ sur $[0, 1]$ et $f \geq g$ sur $[1, 2]$. (1 point)
3. $\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = 1/6 + 5/6 = 1$ unité d'aire. (2 points)
4. $[x^3/3 - x^2/2]_0^2 = 8/3 - 2 = 2/3$, différent de l'aire totale. (1 point)



Exercice 4 : additionner les deux aires colorées, $1/6 + 5/6 = 1$. Échelles adaptées.

Séparer signe et aire

Une intégrale peut être négative ; une aire géométrique est toujours positive ou nulle.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

ÉPREUVE 06 · SYNTHÈSE

Bilan de chapitre

Durée indicative : 90 minutes

Barème : 20 points

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Choisir A, B, C ou D pour chaque question.

Q1 Si $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, alors $F'(x)$ vaut :**A.** e^{-t^2} **B.** e^{-x^2} **C.** 0**D.** $-2xe^{-x^2}$ **Q2** Si f est continue et strictement positive sur un intervalle, toute primitive de f est :**A.** Nécessairement positive**B.** Constante**C.** Strictement croissante**D.** Strictement décroissante**Q3** $\int_0^1 \frac{3}{1+3x} dx$ vaut :**A.** $\ln 3$ **B.** $\ln 4/3$ **C.** $3 \ln 4$ **D.** $\ln 4$ **Q4** $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ vaut :**A.** 2**B.** $1/2$ **C.** $-1/2$ **D.** $\ln 2$

Exercice 2 · Une suite d'intégrales

5 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.1. Calculer I_0 .

(1 point)

2. Montrer que $I_n + I_{n+1} = 1/(n+1)$.

(2 points)

3. En déduire I_1 et I_2 .

(2 points)

Espace de recherche :

ÉPREUVE 06 · SYNTHÈSE · SUITE

Résoudre et justifier

Exercice 3 · Encadrer la même suite

5 points

On conserve $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$. (2 points)
2. Déterminer la limite de (I_n) . (1 point)
3. Montrer que (I_n) est strictement décroissante. (2 points)

Exercice 4 · Une intégrale à borne variable

6 points

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

1. Déterminer une expression explicite de $F(x)$. (2 points)
2. Étudier les variations et donner le minimum. (2 points)
3. Résoudre $F(x) = 2$. (2 points)

Nom : _____

Date : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 06

QCM et exercice 2

Exercice 1 · QCM : une seule réponse

4 points

Q1 Réponse B. Le théorème fondamental donne la fonction intégrée évaluée en la borne variable.

Q2 Réponse C. La dérivée d'une primitive est $f > 0$.

Q3 Réponse D. Une primitive est $\ln(1 + 3x)$.

Q4 Réponse B. $[-1/x]_1^2 = -1/2 + 1 = 1/2$.

Exercice 2 · Une suite d'intégrales

5 points

1. $I_0 = [\ln(1 + x)]_0^1 = \ln 2$.

(1 point)

2. La somme des intégrandes vaut $x^n(1 + x)/(1 + x) = x^n$. Son intégrale de 0 à 1 vaut $1/(n + 1)$.

(2 points)

3. $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln 2$ et $I_2 = 1/2 - I_1 = \ln 2 - 1/2$.

(2 points)

Vérifier une primitive

Dériver l'expression trouvée. Puis calculer « valeur en haut moins valeur en bas ».

Ma reprise

La question à refaire : _____ La règle à retenir : _____

CORRIGÉ · ÉPREUVE 06

Exercices 3 et 4

Exercice 3 · Encadrer la même suite

5 points

1. Sur $[0, 1]$, $0 \leq x^n/(1+x) \leq x^n$. Intégrer donne l'encadrement annoncé. (2 points)
2. $1/(n+1) \rightarrow 0$. Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$. (1 point)
3. $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n(1-x)/(1+x) dx > 0$, car l'intégrande est continue et strictement positive sur $]0, 1[$. (2 points)

Exercice 4 · Une intégrale à borne variable

6 points

1. Une primitive de $(\ln t)/t$ est $(\ln t)^2/2$. Donc $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (2 points)
2. $F'(x) = \ln x/x$, négative sur $]0, 1[$, positive sur $]1, +\infty[$. Le minimum vaut $F(1) = 0$. (2 points)
3. $(\ln x)^2 = 4$, donc $\ln x = \pm 2$. Les solutions sont e^2 et e^{-2} . (2 points)

Séparer signe et aire

Une intégrale peut être négative ; une aire géométrique est toujours positive ou nulle.

Score : _____ / 20

À reprendre : exercice _____, question _____

CORRECTION RAPIDE

Grille des QCM

Chaque ligne correspond à une épreuve. Retrouver les explications dans son corrigé.

Épreuve	Q1	Q2	Q3	Q4
01	D	A	B	C
02	D	C	D	A
03	A	D	C	C
04	A	C	A	A
05	B	D	B	B
06	B	C	D	B

Trois questions à se poser après une erreur

1. Ai-je bien lu les hypothèses, le domaine et les bornes ?
2. Quelle formule ou propriété permet de trancher entre les choix ?
3. Puis-je éliminer une réponse avec un calcul simple ou un cas particulier ?

Ne pas apprendre uniquement la lettre

Une réponse choisie au hasard ne valide pas une méthode. Refaire le calcul sans les propositions, puis retrouver la bonne réponse.

Mes deux pièges personnels

BILAN PERSONNEL

Mes progrès, étape par étape

Noter les résultats et choisir une priorité de révision après chaque épreuve.

Épreuve	Date	Note / 20	Priorité de révision
01			
02			
03			
04			
05			
06			

Un plan de reprise en trois séances

Séance 1. Relire les deux fiches méthode et refaire les calculs de base manqués.

Séance 2. Reprendre deux exercices rédigés, en expliquant chaque étape.

Séance 3. Refaire une épreuve en temps limité et comparer les résultats.

La méthode que je maîtrise maintenant

Mon prochain objectif
