

Fiche sur les suites numériques

Lycée du complexe scolaire Samdech HUN SEN

Année scolaire 2024 – 2025

Classe : TSexp

Prof : DIAKITE

Exercice1 :

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n et précise la nature de la suite (u_n) .
2. Détermine la monotone de suite (u_n) et précise sa limite.
3. Exprime la somme $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .
4. Exprime la somme $\sum_{k=1}^n \ln(u_k)$ en fonction de n . En déduis le calcul de $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ en fonction de n .

Exercice2 :

Pour tout naturel n , on pose $I_n = \int_n^{n+1} 3e^{-3x} dx$.

Handwritten note: $A \rightarrow n n q$

1. a. Calcule I_0 .
b. Exprime I_n en fonction de n .
2. a. Prouve que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b. Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice3 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n + 2 \end{cases}$$

1. Calcule u_1 ; u_2 et u_3 .
2. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 3$. Montre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.
3. Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
4. Calcule la somme S_n des n premiers termes de la suite (v_n) en fonction de n .

Exercice4 :

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par x_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

1. a. Détermine le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
b. Exprime x_{n+1} en fonction de x_n .
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 60\,000 - x_n$
 - a. Montre que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.
 - b. Exprime u_n en fonction de n , en déduis x_n en fonction de n .
 - c. Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
 - d. Calcule la limite de la suite (x_n) . Conclure.

Exercice5 :

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)^2 - n^2$
 - a. Calcule les trois premiers termes de la suite (u_n) .
 - b. Montre que la suite (u_n) est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
Calcule alors u_{99} .
 - c. Calcule la somme : $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199$.

2. On considère une suite arithmétique (u_n) telle que : $u_2 = 4$ et $u_4 = -6$.
 - a. Détermine sa raison r puis son premier terme u_0 .
 - b. Exprime u_n en fonction de n . Calcule u_{100} .

Exercice6 :

Soit (v_n) une suite géométrique telle que : $v_2 = 45$ et $v_4 = 405$.

1. Quelles sont les raisons possibles pour la suite (v_n) ?
2. On sait que la suite (v_n) est croissante.
 - a. Détermine la raison et le premier terme v_0 .
 - b. Exprime v_n en fonction de n puis calcule v_7 .
 - c. Calcule la somme $S = 5 + 15 + 45 + 135 + \dots + 10935$.

✓ **Exercice7 :**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{16u_n - 12}{3u_n + 4}$.

1. Calcule u_1 ; u_2 et u_3 .
2. On pose $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n - 2}$.
 - a. Calcule v_0 ; v_1 et v_2 .
 - b. Montre que (v_n) est une suite arithmétique dont – on précisera la raison.
 - c. Etudie le sens de variation de la suite (v_n) .
 - d. Exprime v_n en fonction de n .
 - e. En déduis l'expression de u_n en fonction de n .
 - f. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Exprime S_n en fonction de n .

Exercice8 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

1. Calcule u_2 ; u_3 et u_4 .
2. La suite (u_n) est – elle arithmétique ? géométrique ? Justifie votre réponse.
3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.
 - a. Montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b. Exprime v_n et u_n en fonction de n .
 - c. En déduis la limite de la suite (u_n) .

Exercice9 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3} \end{cases}$.

1. Détermine le réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - a$, soit une suite géométrique.
2. Exprime v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
3. Calcule $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .
4. Calcule la limite de la suite (u_n) et celle de la suite (S_n) .

✓ **Exercice10 :**

Soient les nombres complexes $Z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1. Ecris Z_1 ; Z_2 et $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous forme trigonométrique.
2. Montre qu'il existe deux suites géométriques (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = Z_1$ et $U_4 = V_4 = Z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

✓ **Exercice11 :**

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0.$$

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E): z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0.$$

5. Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 . On désigne par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution. (2pts)
6. Ecris z_0 et z_1 sous forme trigonométrique. (1pt)
7. Vérifie que z_0 , z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (u_n) dont on précisera la raison. (1pt)
8. Ecris u_4 et u_7 sous forme trigonométrique. (1,5pts)

Exercice 17 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient les nombres complexes :

$$a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4} \text{ et } z_0 = 6 + 6i.$$

On note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout n , entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par : $z_n = a^n z_0$.

1. a. Exprime z_1 et a^2 sous forme algébrique. (1,5pts)
 b. Ecris z_1 sous forme exponentielle et montre que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$. (1pt)
 c. Exprime z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 . En déduis l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle. (1,5pts)
2. Pour tout entier naturel n , on pose $|z_n| = r_n$.
 a. Montre que pour tout entier naturel n , $r_n = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. (0,5pt)
 b. En déduis que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1pt)
 c. Détermine la limite de la suite et interprète géométriquement le résultat obtenu. (1pt)

Exercice 18 :

1. Etudie la transformation géométrie et précise les éléments caractéristiques qui la caractérise :
 a) $z' = z + 2 + 3i$; b) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$; c) $z' = 2z + 1 - i$; d) $z' - i = (\sqrt{3} + i)(z - i)$.
2. On pose pour tout nombre complexe $z \neq -6$, $f(z) = \frac{8z+3}{z+6}$
 a. Détermine la forme algébrique des nombres : $z_1 = f(2i)$; $z_2 = f(3 - 2i)$ et $z_3 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.
 b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.
3. On donne la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n+3}{u_n+6}$
 a. Calcule les valeurs exactes des termes u_1 ; u_2 et u_3 .
 b. Montre par récurrence que pour tout entier n non nul, $1 < u_n < 3$.
 c. Montre que (u_n) est croissante. En déduis qu'elle est convergente.
4. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (v_n) par : $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$.
 a. Montre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0) .
 b. Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
 c. Détermine la limite de la suite (u_n) .

1. Résous l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 . On désigne par z_2 la 3^{ème} solution.
2. Ecris z_0 et z_1 sous forme trigonométrique.
3. Vérifie que z_0 , z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (u_n) dont on précisera la raison.
4. Ecris u_4 et u_7 sous forme trigonométrique.

Exercice 12 :

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

1. Calcule I_0 et I_1 .
2. En utilisant la technique d'intégration par parties, trouve une relation entre I_n et I_{n-1} . (On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$).
3. En déduis I_2 et I_4 .

Exercice 13 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calcule u_1 .
2. Montre que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \frac{3}{2}$.
3. Etudie la monotonie de la suite (u_n) .
4. On pose $v_n = \frac{2}{2u_n - 3} ; \forall n \in \mathbb{N}$.
Montre que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{3n+6}{2n+2}$.
5. Calcule en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} v_k$.

Exercice 14 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calcule les termes : $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$.
2. Vérifie que : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
3. Donne une expression simple de u_n .
4. Calcule la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 15 :

Une radio de proximité commence le premier mois avec 5000 auditeurs. A la fin de chaque mois, il y a 4 000 nouveaux auditeurs et un taux de défection de 20%.

On désigne par :

- U_1 le nombre d'auditeurs le 1^{er} mois,
- U_2 le nombre d'auditeurs le 2^e mois,
- U_n le nombre d'auditeurs le n^{ième} mois.

1. Vérifie que : $U_2 = 8\,000$. (0,75pt)
2. Justifie que, pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = \frac{4}{5}U_n + 4\,000$. (1pt)
3. Soit (V_n) de terme général $V_n = U_n - 20\,000$.
 - a. Calcule V_1 et V_2 . (1pt)
 - b. Montre que (V_n) est une suite géométrique et précise son premier terme et sa raison. (1pt)
 - c. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (1pt)
 - d. Détermine le nombre d'auditeurs après 12 mois d'émission. (0,75pt)
4. La suite (U_n) est-elle convergente ? (0,5pt)

Exercice 16 :