

Exercices : Suites numériques

Exercice 1 : TSExp 2000

1- On considère l'application polynôme P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24.$$

- a) Vérifier que $P(8) = 0$.
 - b) Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
 - c) En déduire la résolution de l'inéquation : $(x \in \mathbb{R}), P(x) \leq 0$.
- 2- En utilisant les résultats de la question 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$:
- a) L'équation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 = 0$.
 - b) L'inéquation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 \leq 0$.
 - c) L'équation : $2^{3x} - 4 \cdot 2^{2x} - 29 \cdot 2^x - 24 = 0$.

3- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2; 1/3\}$ par :

$$f(x) = \frac{9x^2 + 14x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

- a) Vérifier que : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$.
 - b) En déduire les primitives de f sur $\mathcal{D}$.
- 4- On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}$$

- a) Prouver que, pour tout n , on a : $U_n > 0$.
- b) On introduit la suite (V_n) , $n \in \mathbb{N}$ de terme général : $V_n = \frac{1}{U_n}$.
- c) Prouver que la suite (V_n) est une suite arithmétique.
- d) En déduire V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .
- e) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (U_n) .
- f) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(2-x)} = U_0$?

Exercice 2 : TSExp 2002

1) (U_n) est une suite arithmétique définie par $U_3 = 2$ et $U_7 = 14$

- a) Déterminer la raison r de cette suite, puis exprimer U_n en fonction de n .
- b) Calculer $S = U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_{20}$.

2) Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard 5 boules de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages contenant :

- a) 3 boules rouges et 2 boules blanches.
- b) 3 boules blanches et 2 boules rouges.
- c) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0$.

Exercice 3 : TSExp 2003

1-/ soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$$

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

a-/ Exprimer V_n en fonction de n et montrer (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1^{er} terme et la raison.

b-/ Calculer $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$.

c-/ Utiliser la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n . En déduire U_n en fonction de n . calculer la limite de U_n .

2-/ Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.

Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne ;

- Le tirage d'une boule rouge ne rapporte rien
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50 F
- Chaque boule verte tirée rapporte 250 F ;

Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur :

a-/ de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0 F).

b-/ de perdre 50F ?

c-/ de gagner 50F ?

d-/ de gagner 250F ?

NB : Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

Exercice 4 : TSExp 2004

1-/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ et $V_n = \ln(U_n)$

a-/ Calculer $U_0 ; U_1 ; U_2 ; V_0 ; V_1 ; V_2$

b-/ Déterminer la nature et la raison de chacune des suites.

c-/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et en déduire la limite de V_n en $+\infty$.

2-/ Un examen comporte deux épreuves : une épreuve de biologie et une épreuve de chimie. Il y a 20 questions en biologie et 15 questions en chimie. Chaque question est marquée par un numéro et ces numéros sont placés dans deux sacs distincts, un contenant les questions de chimie et l'autre les questions de biologie et une question en chimie sera déclaré directement admis tout candidat qui aura répondu vrai aux deux questions.

a-/ Un candidat à cet examen a combien de choix possibles ?

b-/ Un candidat C_1 se présente à cet examen en ignorant 8 questions de biologie et 5 questions de chimie ; un autre candidat C_2 se présente en ignorant 5 questions de biologie et 8 questions de chimie.

Lequel des deux candidats a plus de chance de réussir ?

c-/ Quel est le pourcentage de réussite du candidat le moins chanceux parmi les deux ?

d-/ Le jury décide de repêcher tout candidat qui aura répondu vrai à la question de chimie et raté la question de biologie ; dans ces conditions :

– Quelle est la probabilité que C_1 soit repêché, que C_2 soit repêché ?

– Quelle est la probabilité pour chacun d'être admis à l'examen ?

Exercice 5 : TSExp 2006

Une observation faite par un journal sur ses abonnés a permis de constater, pour chaque année un taux de réabonnement de 80% ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés. On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1-/ Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 5000$. [1pt]

2-/ Soit (U_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 25000 - a_n$.

a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n . [1 pt]

b) Dédurre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. [1pt]

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n . En déduire l'expression de a_n en fonction de n . [1pt].

3-/

a-/ Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $25\,000 - 15\,000 \times (0,8)^x > 22\,000$. [0,5pt].

b-/ En déduire le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000. [0,5pt].

Exercice 6 : TSExp 2007

1°/ Soit la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = e^{2n+1}$.

a.) Calculer U_0, U_1, U_2 . (1pt)

b.) Préciser la nature et la raison de la suite (U_n) . (1pt)

c.) Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ (0,5pt).

2°/ Dans un centre sportif il y a N étudiants dont :

200 pratiquent du football ;

un tiers pratique du basket-ball;

un dix-huitième pratique les deux sports ;

un sixième ne pratique ni l'un ni l'autre.

a.) Traduire les informations ci-dessus sous forme d'équations permettant de calculer N puis déterminer sa valeur. (1pt)

b.) Déterminer la probabilité pour qu'un sportif choisi au hasard dans ce centre:

– soit à la fois footballeur et basketteur. (0,5pts)

– ne soit ni footballeur ni basketteur. (0,5pts)

– soit seulement footballeur. (0,5pt)

Exercice 7 : TSExp 2008

Soit la suite (U_n) définie par $U_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1, U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2}$

1°/ Calculer U_2 et U_3 .

(U_n) est – elle une suite arithmétique ? Est – elle une suite géométrique ?

(2,5 pts)

2°/ Pour tout $n \geq 1$, on pose $V_n = 3 - U_n$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique. (1,5pt)

3°/ Exprimer V_n en fonction de n . En déduire U_n en fonction de n .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (2 pts)

Exercice 8 : TSExp 2012

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on donne l'équation d'inconnue complexe z (E) : $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i = 0$.

1°/ Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_2 . On désigne par z_1 la 3^{ème} solution.

2°/ Ecrire z_0 et z_1 sous forme trigonométrique.

3°/ Vérifiez que z_0 , z_1 et z_2 sont dans cet ordre les trois premiers termes consécutifs d'une suite géométrique complexe (U_n) dont on précisera la raison.

4°/ Ecrire U_4 et U_7 sous forme trigonométrique

Exercice 9 : TSExp 2015

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$

1°/ a) Déterminez le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017. (0,5pt)

b) Exprimez X_{n+1} en fonction de X_n . (1pt)

2°/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$

a) Montrez que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme. (1pt)

b) Exprimer U_n en fonction de n , en déduire X_n en fonction de n (1pt)

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ? (1pt)

d) Calculer la limite de la suite (X_n) . Conclure (0,5pt)

Exercice 10 : TSExp 2017

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries. On suppose que la population augmente de 6,5% toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactéries à la préparation toutes les heures.

On note R_n le nombre de bactéries présente dans la population au bout de n heures.

On admettra que pour tout entier naturel n : $R_{n+1} = 100 + 1,065R_n$.

On introduit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = R_n + \frac{10000}{65}$.

1°/ Montre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2°/ Exprime U_n en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n .

3°/ Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la capacité maximale du milieu ?

Exercice 11 : TSExp 2018

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1. Calcule u_1 et u_2 .

2. a) Démontre que pour tout entier naturel non nul n , $0 < u_n < 1$

b) Démontre que la suite u_n est croissante.

c) Que pouvez-vous en déduire ?

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

- Démontre que la suite (v_n) est géométrique.
- Calcule, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
- Démontre que la suite u_n est convergente et détermine sa limite.

Exercice 12 : TSEp 1999

- (U_n) est une suite géométrique de raison 3 et $U_1 = 2$.
 - Calculer U_n en fonction de n
 - Calculer la somme $U_1 + U_2 + \dots + U_7$.
 - (V_n) est une suite arithmétique de raison r et $V_1 = 2$.
Exprimer V_n en fonction de n puis calculer : $V_{30} + V_{31} + V_{32}$.
- Résoudre les équations différentielles :
 - $y'' + 5y = 0$
 - $y'' + 9y = 0$
 -
- a) Calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$
 - En déduire l'intégrale suivante : $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$
- Résoudre
 - L'équation : $x \in \mathbb{R}, 2(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.
 - L'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \ln(x-3) + \ln(x-1) < \ln(2x+3)$.

Exercice 13 : TSEp 1998

- Simplifier l'expression : $E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$
 - On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = e^{2n-1}$.
 - Calculer $U_0, U_1, U_2, U_3, U_{n+1}$.
 - Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - Exprimer en fonction de n , la somme $S_n = \sum_{i=0}^n U_i = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
 - Trouver la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$.
- NB :** On donne : $e = 2,7$; $e^2 = 7,3$; $e^3 = 19,7$; $\ln 171 = 5,14$.
- Soit (V_n) la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \ln(U_n)$.
 - Exprimer la somme $S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n .
 - Exprimer le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ en fonction de n .

Exercice 14 : TSEp 2020

On considère la suite numérique (U_n) _{$n \in \mathbb{N}$} définie par : $U_n = e^{2n-1}$.

- Calcule U_0, U_1, U_2, U_3 et U_{n+1} .
 - Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - Exprime en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
 - Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
 - Trouve la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$.
- Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$. On pose $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
Exprime le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ en fonction de T_n .

Exercice 15 : TSExp 2021

Soit la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$$
 . (v_n) est la suite définie par : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$.

1. Exprime v_{n+1} en fonction de v_n .
2. Déduis-en la nature de la suite (v_n) .
3. Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$
 - a. Exprime S_n en fonction de n .
 - b. Calcule la somme des 30 premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 16 : TSExp 2022

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de 1^{er} terme $U_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de 1^{er} terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n , on note Z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

- 1) a) Exprime U_n et V_n en fonction de n ;
- b) Déduis-en Z_n .

- 2) Démontre que (Z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme

$$Z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} .$$

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de 1^{er} terme $U_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de 1^{er} terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n , on note Z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

- 1) a) Exprime U_n et V_n en fonction de n ;
- b) Déduis-en Z_n .

- 2) Démontre que (Z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme

$$Z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} .$$